

AUTOMATIQUE

REPRESENTATION EXTERNE

0. Préambule

Plan du cours

AUTOMATIQUE CONTINUE

- 1. Commande. Modèle d'un processus**
- 2. Performances d'un Système : Stabilité - Précision - Rapidité**
- 3. Correction d'un Système Asservi Linéaire (SAL)**

AUTOMATIQUE DISCRETE

- 4. SALs échantillonnés**
- 5. Correction numérique - Régulateurs standards**
- 6. Performances d'un SAL échantillonné : Stabilité - Précision - Rapidité**
- 7. Synthèse des correcteurs numériques - Réponse pile**

ANNEXE

- 8. Logique floue**

Bibliographie

- [1] **H. Bühler** « Réglages échantillonnés » *PPR*
- [5] **K. Ogata** « Discrete Time Control systems » *Prentice*
- [7] **M. Rivoire / J.L. Ferrier** « Automatique » *Eyrolles*
- [8] **Y. Sévely** « Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés » *Dunod*
- [9] **Y. Thomas** « Signaux & systèmes linéaires » *Masson*

1. Commande. Modèle d'un processus

COMMANDE

1. Introduction

Automatique :

Objectif : contrôler, commander un système.

Domaines d'application :

- commande de processus industriels (domaines initiaux)
- économie, gestion, géophysique, biologie, etc...
- Systèmes temps réel, capteurs - actionneurs :

Constituants de l'automatique :

- Théorie des systèmes.
- Asservissement (\equiv régulation).
- Commande - Commande optimale.
- Identification.

Automatique Continue :

Signaux / systèmes mis en jeu sont continus (\equiv à TC).

Ex.: régulation de la vitesse d'un moteur.

Automatique Discrète :

\exists Signaux / systèmes mis en jeu discrets (\equiv à TD).

Ex. : séquenceur programmable de perçage de pièces.

Représentation Externe : Représentation Fréquentielle
Système représenté par sa FT

Représentation Interne : Représentation Temporelle
Système décrit par son état \mathbf{X} dans le plan de phase $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$
$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \quad (\mathbf{u} : \text{entrée})$$

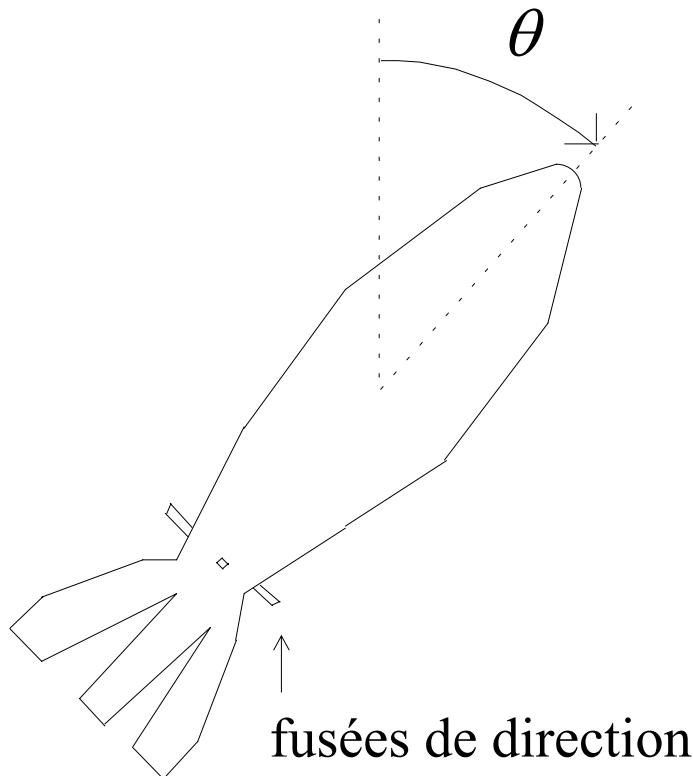
Exemples de régulation :

- Puissance de frappe des touches du clavier d'un ordinateur contrôlée par le retour (*feedback*) du toucher (perception tactile)
- Puissance vocale assujettie au retour (perception auditive).
- Direction d'automobile corrigée (perception visuelle) ...

Exemple : Asservissement de la direction de vol d'un vaisseau spatial, décrit dans le plan de phase :

Contrôle de la direction de vol (l'inclinaison % verticale au sol) d'un vaisseau spatial.

On veut $\theta_0 = \theta$ (θ_0 : direction de consigne) :

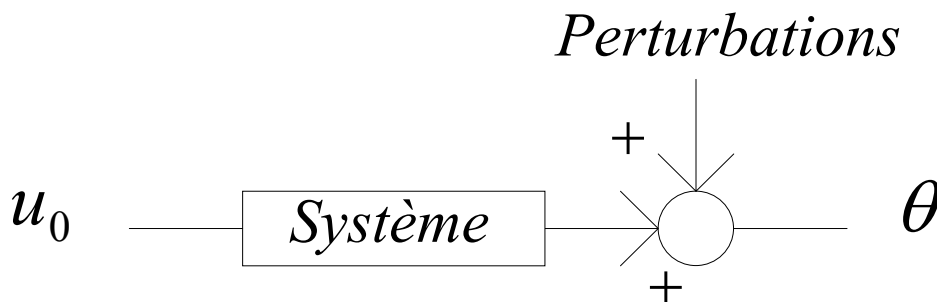


Commande en Boucle Ouverte (non asservie) (BO)



→ Déterminer le couple de commande u_0 tel que $\theta = \theta_0$

Commande directe insuffisante car « aveugle » :



Commande en Boucle Fermée (\equiv asservie) (BF)
(SB: Système Bouclé)

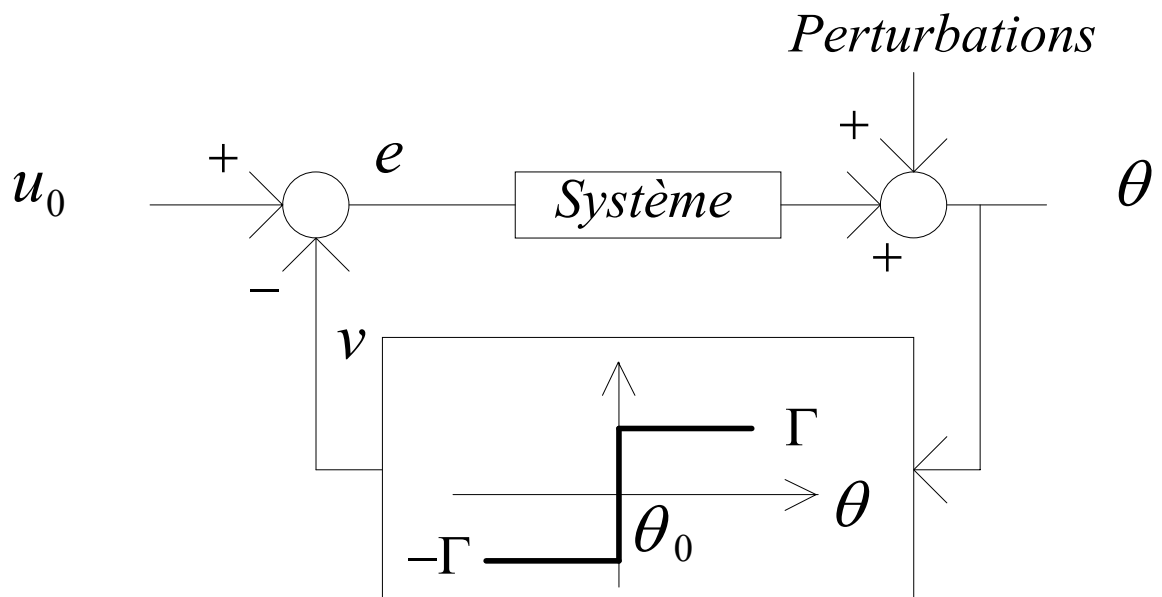
Variations de la sortie prises en compte par un feedback

(Γ : couple)

Exemple de retour le plus simple :

$$\begin{cases} v = -\Gamma & \text{si } \theta < \theta_0 \\ v = 0 & \text{si } \theta = \theta_0 \\ v = \Gamma & \text{si } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Commande en tout ou rien :



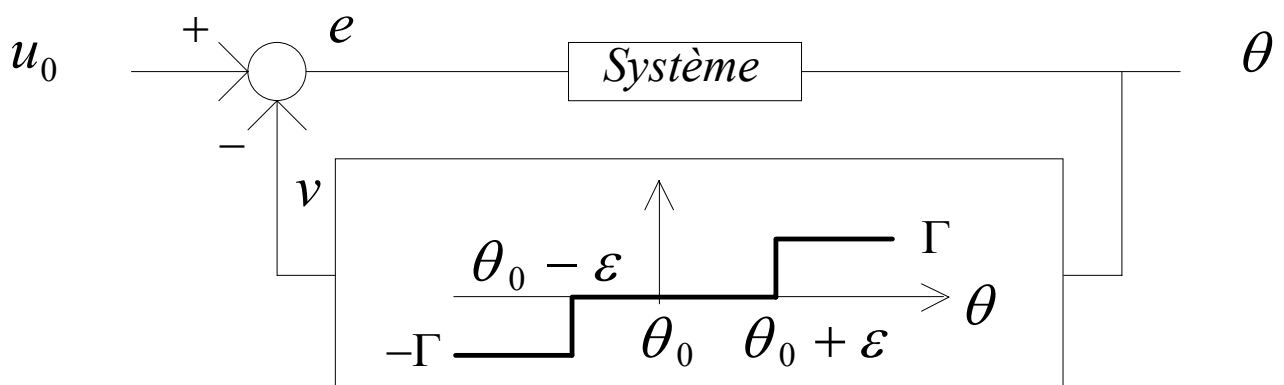
La commande se fait par l'erreur : $e = u_0 - v$

- si pas de perturbation : $\theta = \theta_0 \rightarrow v = 0 \rightarrow e = u_0$
- si perturbation : $\theta \neq \theta_0 \rightarrow v \neq 0$

Inconvénient : fortes oscillations de θ autour de θ_0 .

→ amélioration: introduction d'une bande morte (*dead zone*) $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ autour de θ_0 :

$$\begin{cases} v = -\Gamma & \text{si } \theta < \theta_0 - \varepsilon \\ v = 0 & \text{si } \theta_0 - \varepsilon \leq \theta \leq \theta_0 + \varepsilon \\ v = \Gamma & \text{si } \theta > \theta_0 + \varepsilon \end{cases}$$



Equations du système (cas de régulation sans bande morte)

J : moment d'inertie du vaisseau.

$$\text{RFD} : \sum \text{Couples} = J\ddot{\theta} \quad (\text{couple} = \text{moment de force})$$

$$J\ddot{\theta} = e = u_0 - v = \begin{cases} u_0 + \Gamma & \text{si } \theta < \theta_0 \\ u_0 & \text{si } \theta = \theta_0 \\ u_0 - \Gamma & \text{si } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$\theta < \theta_0 : \quad \ddot{\theta} = \frac{u_0 + \Gamma}{J} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{u_0 + \Gamma}{J}t + \dot{\theta}_0$$

$$\rightarrow \theta = \left(\frac{u_0 + \Gamma}{2J} \right) t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

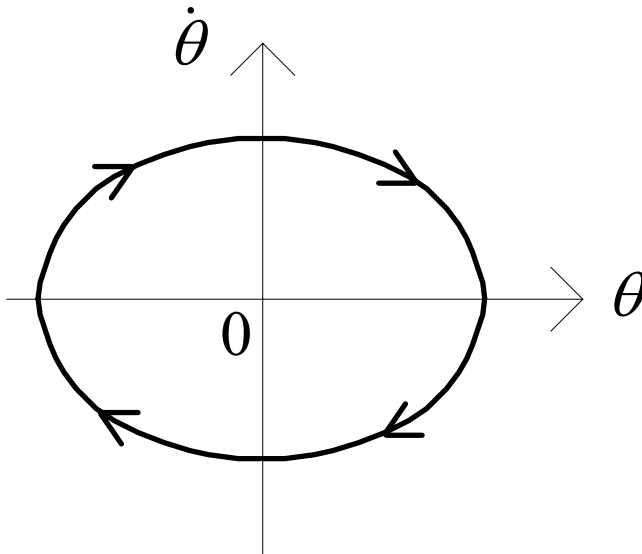
$$\theta = \theta_0 : \quad \ddot{\theta} = \frac{u_0}{J} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{u_0}{J}t + \dot{\theta}_0$$

$$\rightarrow \theta = \left(\frac{u_0}{2J} \right) t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

$$\theta > \theta_0 : \quad \ddot{\theta} = \frac{u_0 - \Gamma}{J} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{u_0 - \Gamma}{J}t + \dot{\theta}_0$$

$$\rightarrow \theta = \left(\frac{u_0 - \Gamma}{2J} \right) t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

→ Cycle de régulation (cas où $\theta_0 = 0$) :



Exemple similaire :

Régulation de la direction d'un véhicule automobile :

Feedback visuel pour corriger les perturbations (pavé ...) écartant le véhicule de la direction de consigne.

- *commande analogique :*

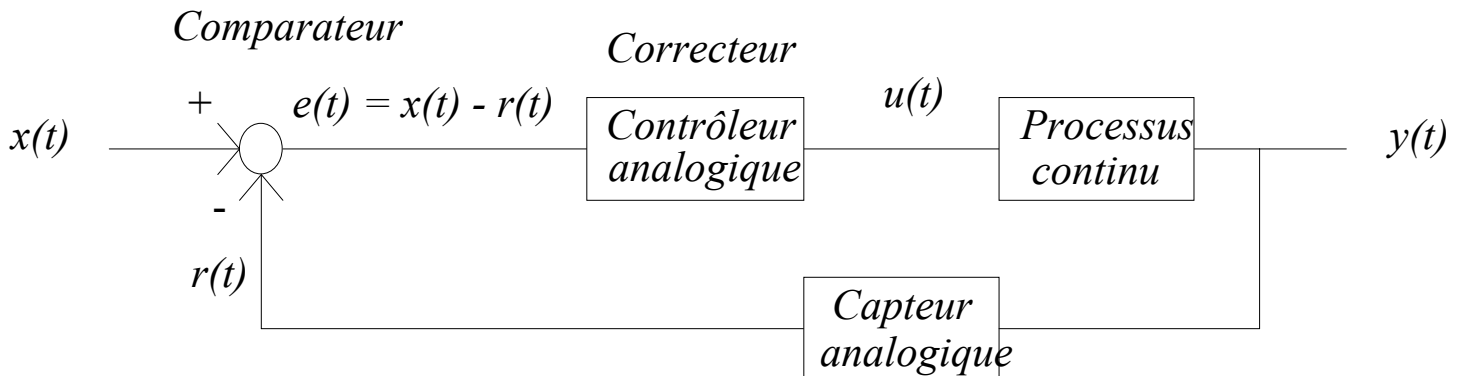
observation de la route en *permanence*

- *commande échantillonnée :*

observation de la route à *intervalles de temps réguliers*

2. Structure générale d'un asservissement

Asservissement continu d'un processus continu



x : entrée, ou consigne (commande de l'asservissement)

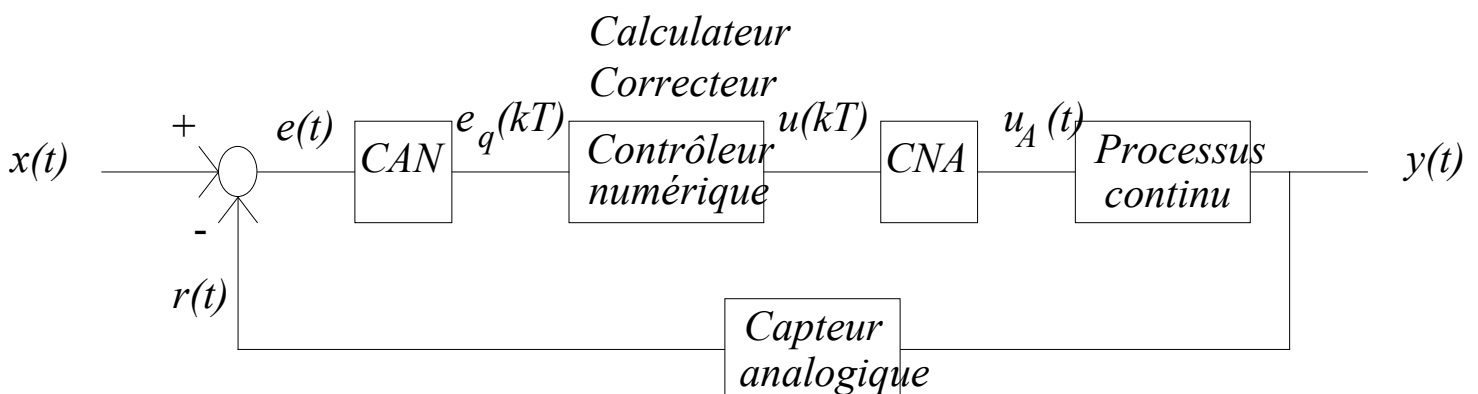
u : commande (du processus)

r : retour, ou feedback

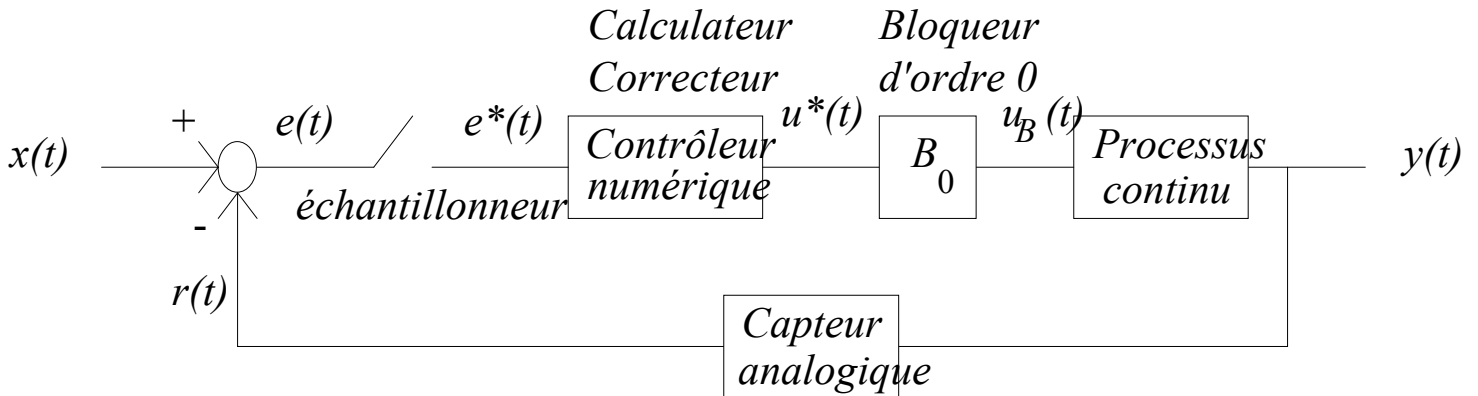
e : erreur

y : sortie

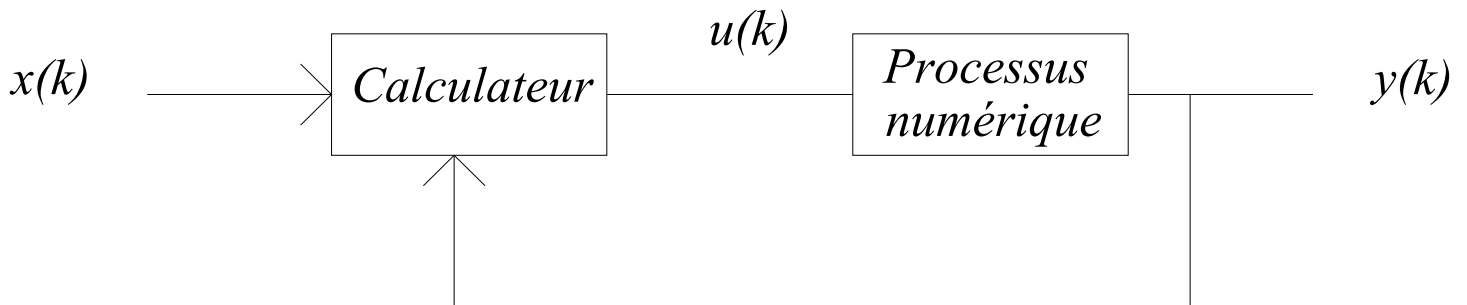
Asservissement numérique d'un processus continu



Asservissement échantillonné d'un processus continu



Asservissement numérique d'un processus numérique



Fonctionnement d'un asservissement

(l'asservissement obéit à la commande)

- *Fonctionnement en suiveur (\equiv poursuite) :*

- . L'entrée de commande (consigne) varie.
- . La sortie doit varier dans le même sens que la consigne (elle ne doit pas la contrer, s'y opposer).
- . Les perturbations peuvent être ignorées pour qualifier en 1ère approximation ce type de fonctionnement.

- *Fonctionnement en régulation :*

- . L'entrée (consigne) est constante (réglable).
- . La sortie doit être constante malgré les perturbations.
- . L'entrée de perturbations doit être contrée.

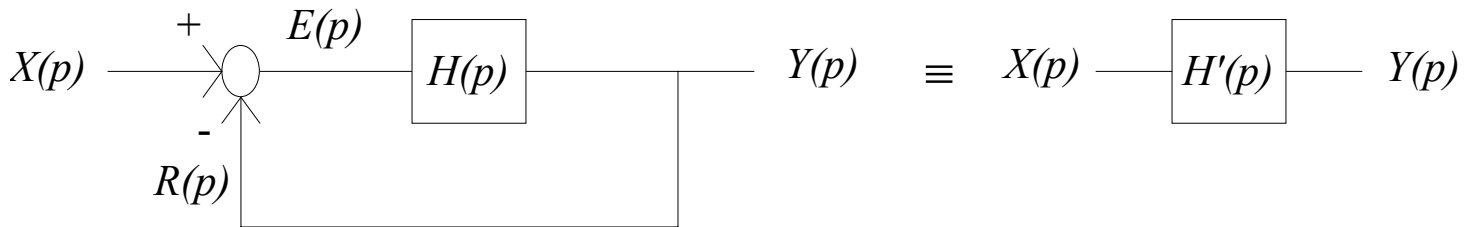
Structure de l'asservissement → commande par la consigne et non par les perturbations.

3. Représentation externe

TEMPS CONTINU	— / —	TEMPS DISCRET
$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow$ $y(t) = x(t) * h(t)$		$x_k \longrightarrow \boxed{h_k} \longrightarrow$ $y_k = x_k * h_k$
TL (monolatérale) \downarrow (causalité)		TZ (monolatérale) \downarrow (causalité)
$X(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow Y(p) = H(p) X(p)$ <i>(si CI nulles)</i>	$z = e^{pT}$	$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) = H(z) X(z)$ <i>(si CI nulles)</i>
$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$: FT du système		$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$: FT du système
$H(p) = TL[h(t)]$		$H(z) = TZ[h_k]$
$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}$		$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{\sum_{i=0}^n b_i z^i}$
Réalisabilité (causalité) $\rightarrow \boxed{n > m}$		Réalisabilité (causalité) $\rightarrow \boxed{n \geq m}$
<i>Opérations Temps - Fréquence</i> (p)		<i>Opérations Temps - Fréquence</i> (z)
$\frac{d}{dt} \leftrightarrow \cdot p$		$- \leftrightarrow \cdot (z - 1)$
$\int \leftrightarrow \div p$		$\sum \leftrightarrow \div (z - 1)$

4. Relations fondamentales d'un système bouclé (TC)

Système Bouclé à retour unitaire



$$Y(p) = H(p)E(p) = H(p)[X(p) - R(p)] = H(p)[X(p) - Y(p)]$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = H'(p)$$

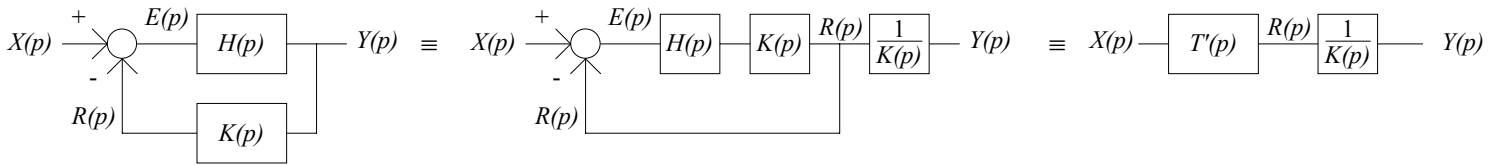
$$\rightarrow \boxed{H'(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)}}$$

$H(p)$: FTBO :



$H'(p)$: FTBF : $H'(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$

Système Bouclé à retour non unitaire



avec : $T(p) \stackrel{\Delta}{=} H(p)K(p)$ et : $T'(p) \stackrel{\Delta}{=} \frac{T(p)}{1 + T(p)}$

$$Y(p) = H(p)[X(p) - R(p)] = H(p)[X(p) - K(p)Y(p)] = H(p)K(p) \left[\frac{X(p)}{K(p)} - Y(p) \right]$$

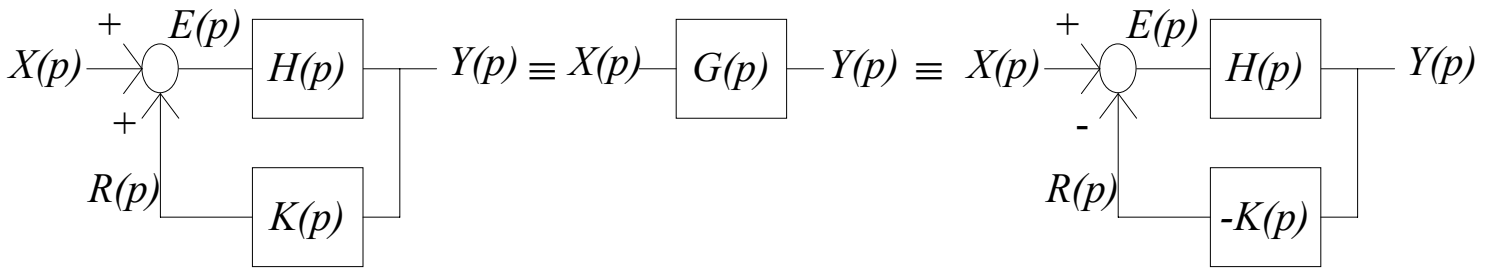
$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{H(p)}{1 + K(p)H(p)} = \frac{1}{K(p)} \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

$$\frac{E(p)}{X(p)} = \frac{1}{H(p)} \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + T(p)}$$

$$T(p) = H(p)K(p) : \text{ FTBO} \qquad T(p) = \frac{R(p)}{E(p)}$$

$$\frac{1}{K(p)} T'(p) : \text{ FTBF} \qquad \frac{1}{K(p)} T'(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Système Bouclé à comparateur +/+ :



$$G(p) = \frac{H(p)}{1 - K(p)H(p)}$$

Performances d'un système bouclé

- *Rapidité*
- *Précision*
- *Stabilité*

Exemple : autofocus de caméra vidéo :

- *Rapidité* : Correction de la mise au point rapide % à la variation de la prise de vue.
- *Précision* : Mise au point précise sinon images floues.
- *Stabilité* : Correction de la mise au point → écarts ou oscillations de la netteté dont l'amplitude doit diminuer avec le temps.

Autre exemple : - Système d'antiblocage des roues (ABS)

Dilemmes

Les performances présentent des *dilemmes* :

Exemple :

↗ Précision → Déstabilisation du système.

Exemple : Phénomène de larsen

5. Causalité

En *automatique*, les *signaux* et *systèmes* mis en jeu sont généralement *causaux* :

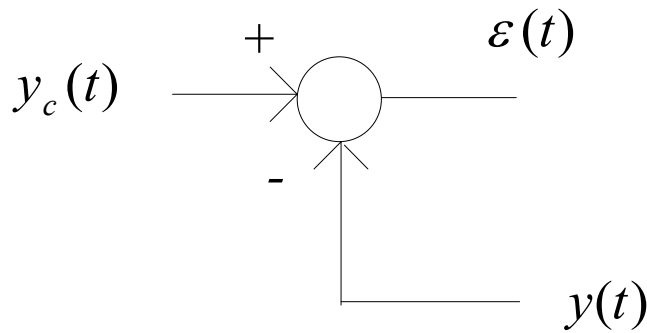
l'asservissement se fait en *temps réel* (\equiv *on-line*).

MODELE D'UN PROCESSUS

1. Le signal de commande

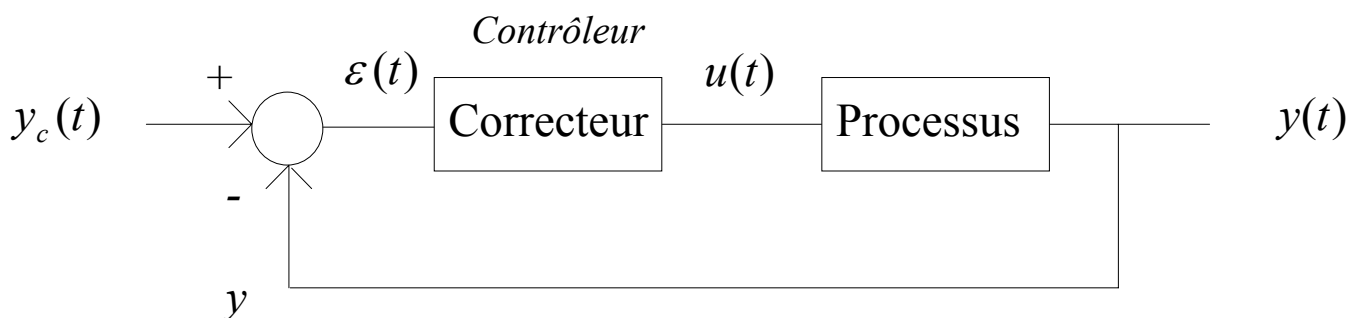
1.1. Commande analogique

Erreur $\varepsilon = y_c - y$ évaluée *en permanence*



Ex. : Le conducteur d'un véhicule a l'oeil rivé sur la route.

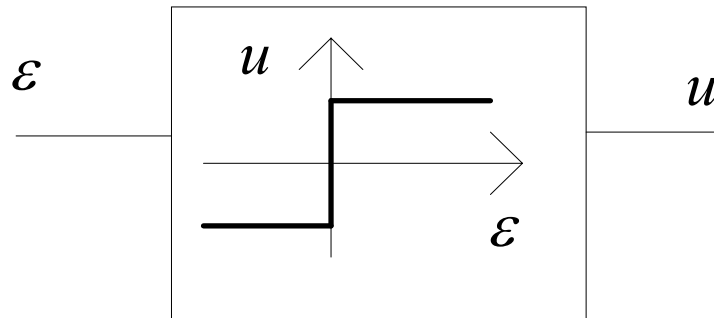
Le signal de commande u est alors ajusté en permanence par le correcteur pour corriger l'erreur.



a) *Commande la plus simple : TOUT OU RIEN (non linéaire)*

$\varepsilon > 0 \rightarrow u$ mis au maximum

$\varepsilon < 0 \rightarrow u$ mis au minimum

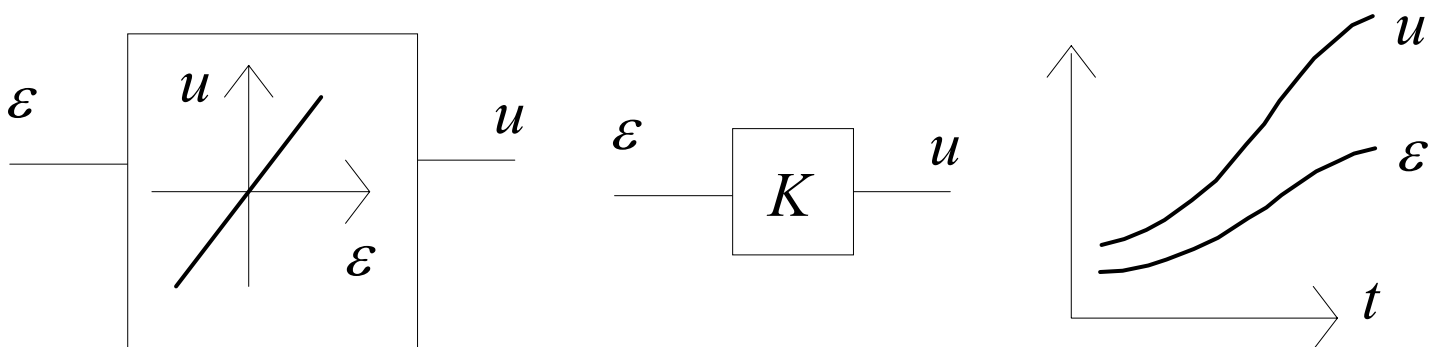


b) *Commande proportionnelle (commande linéaire)*

Améliore la commande du type « TOUT OU RIEN » :

Commande proportionnelle : $u(t) = K \varepsilon(t)$

Réalisation de cette commande : simple amplificateur de gain K



La précision du système croît avec K .

Exemple: commande de la vitesse d'un véhicule :

le conducteur actionne d'autant plus la commande d'accélérateur qu'il est loin de sa consigne de vitesse.

c) *Commande intégrale (commande linéaire)*

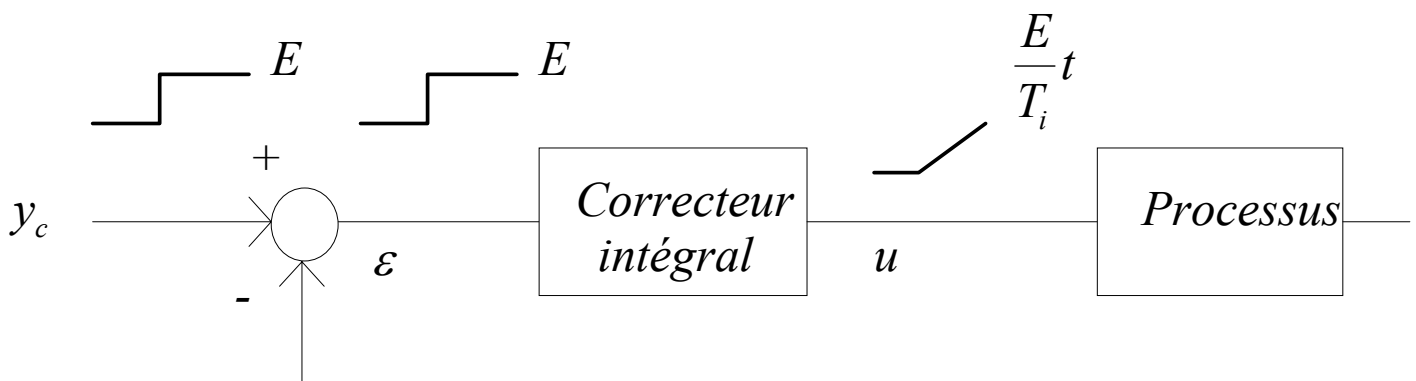
Pb de la commande proportionnelle:

variation brutale de la consigne y_c (ex.: démarrage) $\rightarrow \mathcal{E}$ varie brutalement
 $\rightarrow u = K \mathcal{E}$ est immédiatement saturé.

Exemple de la commande de la vitesse d'un véhicule :

Au lieu d'écraser brutalement l'accélérateur au démarrage
 \rightarrow commande u progressive, par une loi de commande intégrale :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \mathcal{E}(x) dx \quad (T_i : \text{Cte})$$



La commande intégrale est progressive mais persévérante :
 tant que $\mathcal{E} \neq 0$, u varie.

La commande intégrale améliore la précision du système

$\mathcal{E} > 0$	$u \uparrow$
$\mathcal{E} < 0$	$u \downarrow$

Loi de commande intégrale associée à une commande proportionnelle :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \mathcal{E}(x) dx + K \mathcal{E}(t)$$

d) *Commande dérivée (commande linéaire)*

Ex. : L'observation de la température y à un instant donné indique qu'elle est inférieure de 10°C à la consigne y_c
 → il faut chauffer, mais en tenant compte de la tendance de \mathcal{E} :

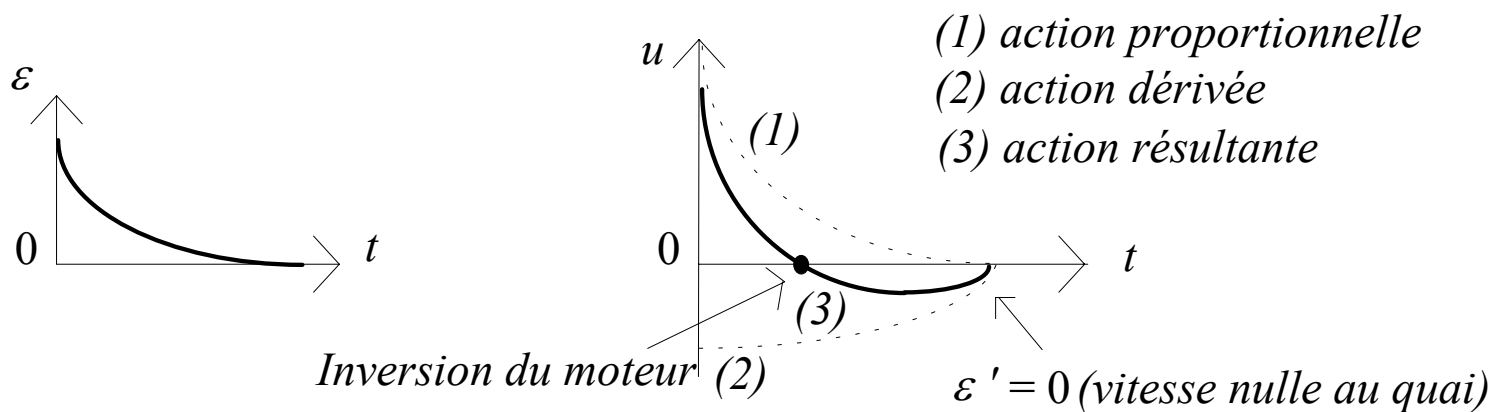
si $\mathcal{E} \nearrow$ il faut plus chauffer que si $\mathcal{E} \searrow$: *commande différentielle, dérivée*

Loi de commande :
$$u(t) = T_d \dot{\mathcal{E}}(t)$$

Loi de commande différentielle associée à une commande proportionnelle

$$u(t) = T_d \dot{\mathcal{E}}(t) + K\mathcal{E}(t)$$

Ex. : La commande d'accostage d'un navire (\mathcal{E} = distance au quai) :



Commande dérivée → correction rapide sans risque de dépassement par rapport à la consigne ($\mathcal{E} < 0$ serait catastrophique !)

Elle permet d'accroître la rapidité et la stabilité d'un système.

e) *Commande PID (commande linéaire)*

Correcteur standard : corrige stabilité, rapidité et précision d'un processus.

Loi de commande PID (Proportionnelle + Intégrale + Dérivée) :

$$u(t) = K\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(x)dx + T_d \dot{\varepsilon}(t)$$

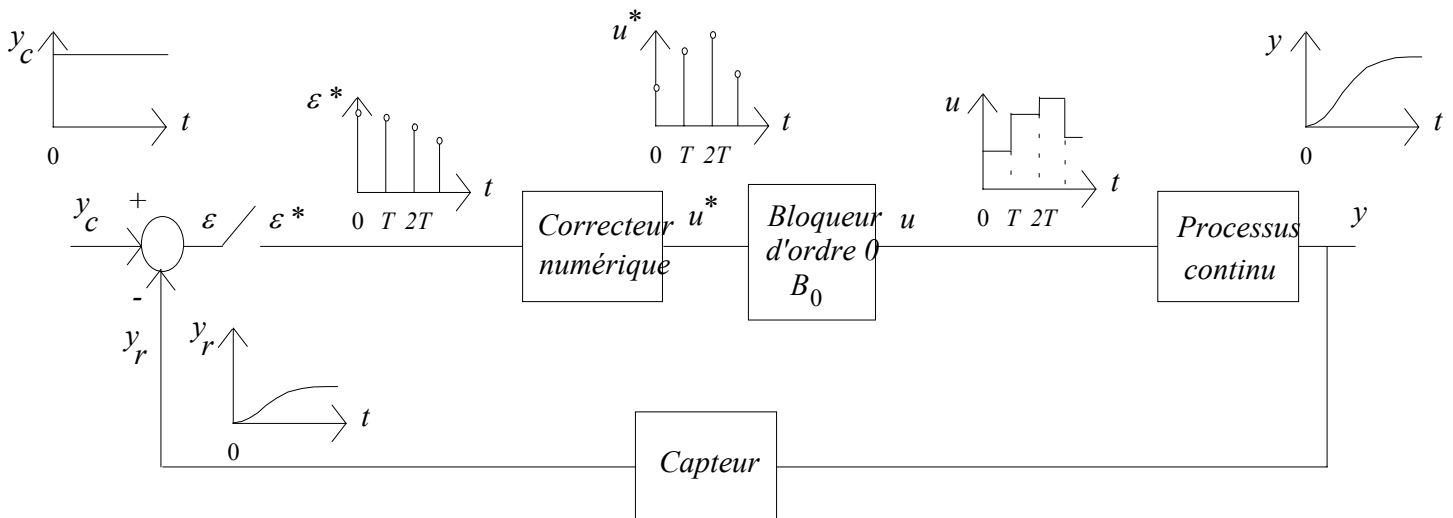
1.2. Commande échantillonnée

Avantage : Souplesse de réalisation du contrôleur.

L'erreur ε est évaluée *périodiquement*.

Ex. : Le conducteur d'un véhicule jette un coup d'oeil de temps en temps.

Exemple : *Commande échantillonnée d'un processus continu*



(T : période d'échantillonnage).

Loi de commande : algo reliant les échantillons de $u^*(t)$ et de $\varepsilon^*(t)$:

$$u^*(t) = f[\varepsilon^*(t)]$$

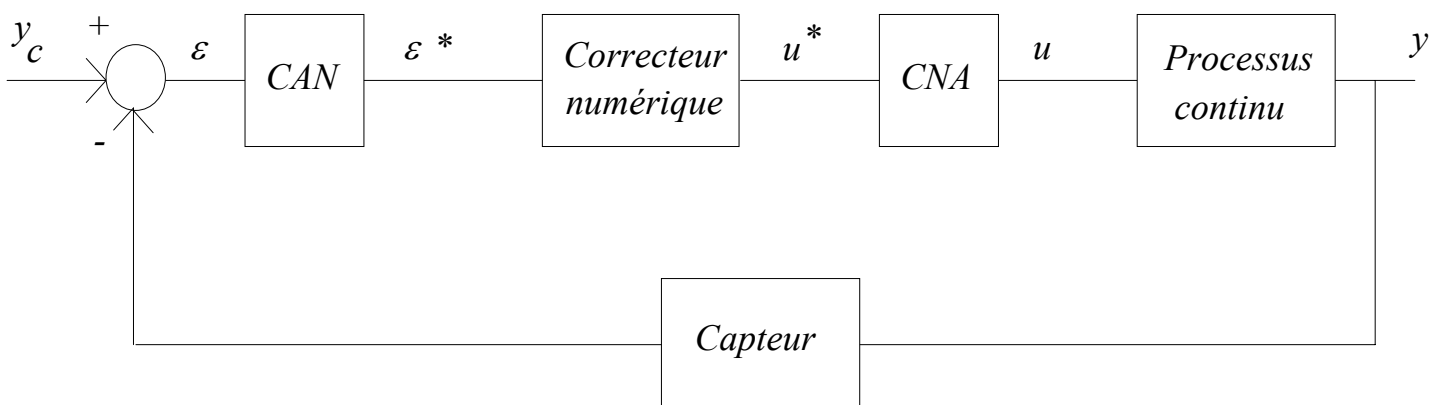
Commande PID échantillonnée (commande linéaire)

- Amplification analogique (K) \rightarrow Amplification numérique (K)
- \int (Intégration) \rightarrow \sum (Somme)
- $\frac{d}{dt}$ (Dérivation) \rightarrow $-$ (Différence)

1.3. Commande numérique

Commande num. = commande échantillonnée + Bruit de quantification

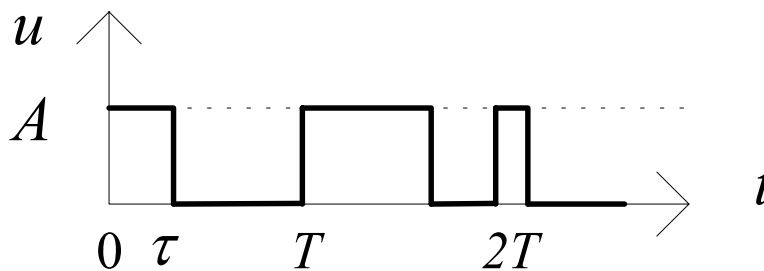
Exemple : Commande numérique d'un processus continu



1.4. Commande PWM (non linéaire) (analog. ou échantillonnée)

L'action u n'est plus modulée en amplitude mais en largeur (durée)

Ex. : *Processus thermique* : commande en tout ou rien



2. Modèle d'un processus

2.1. Modèle du 1er ordre (intégrateur (≡ passe-bas))

- FT :

$$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

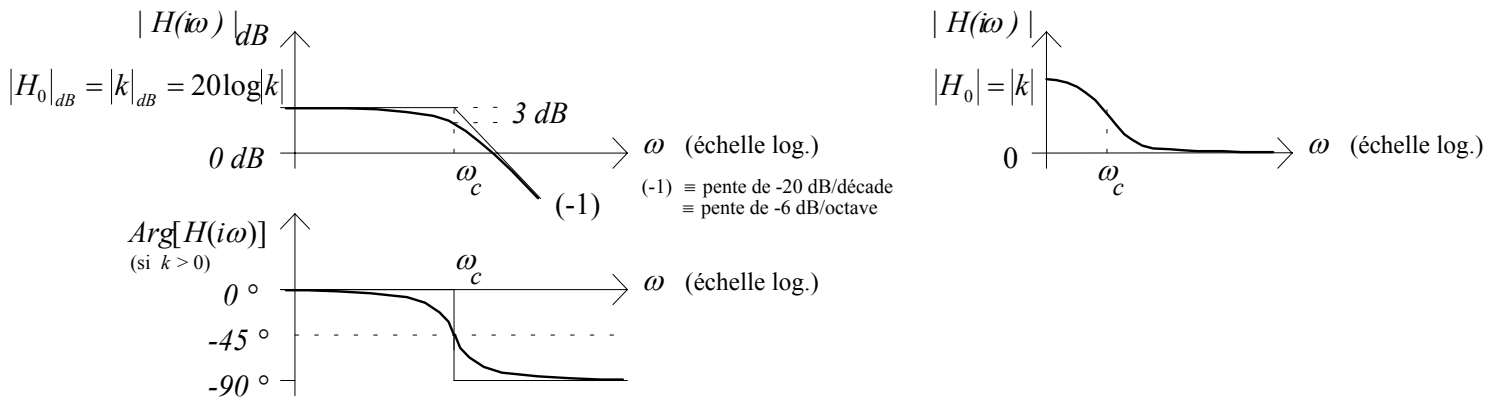
$H(p)$ présente 1 pôle : $p_0 = -\frac{1}{\tau}$

- Réponse Fréquentielle :

$$H(p=i\omega) = \frac{k}{1+i\omega\tau} = \frac{k}{1+i\frac{\omega}{\omega_c}}$$

k : Gain statique [≡ gain $H(i\omega)$ à $\omega=0$] noté H_0 ($\omega=0 \leftrightarrow t = \infty$)
τ : C ^{te} de temps ($\tau > 0$)
$\omega_c = 1/\tau$: Pulsation de coupure ($\omega_c > 0$)
$\omega = 2\pi\nu$ ω : pulsation ν : fréquence

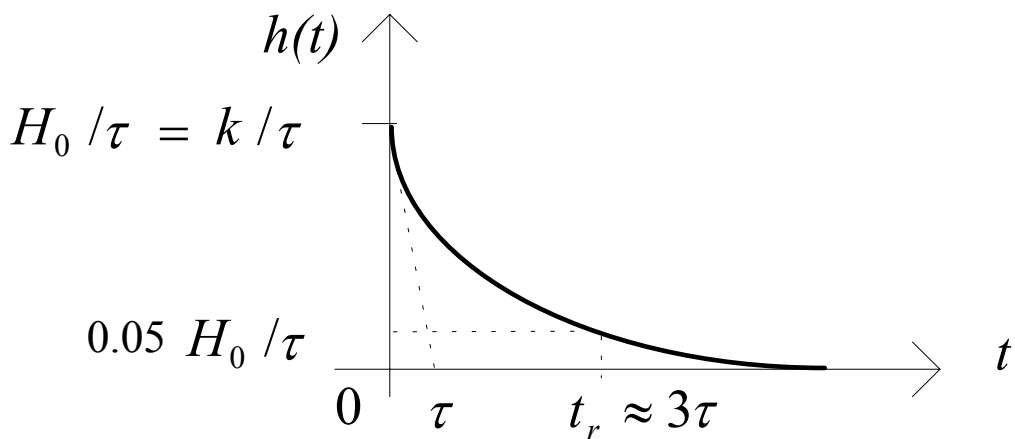
2.1.1. Etude fréquentielle



2.1.2. Etude temporelle

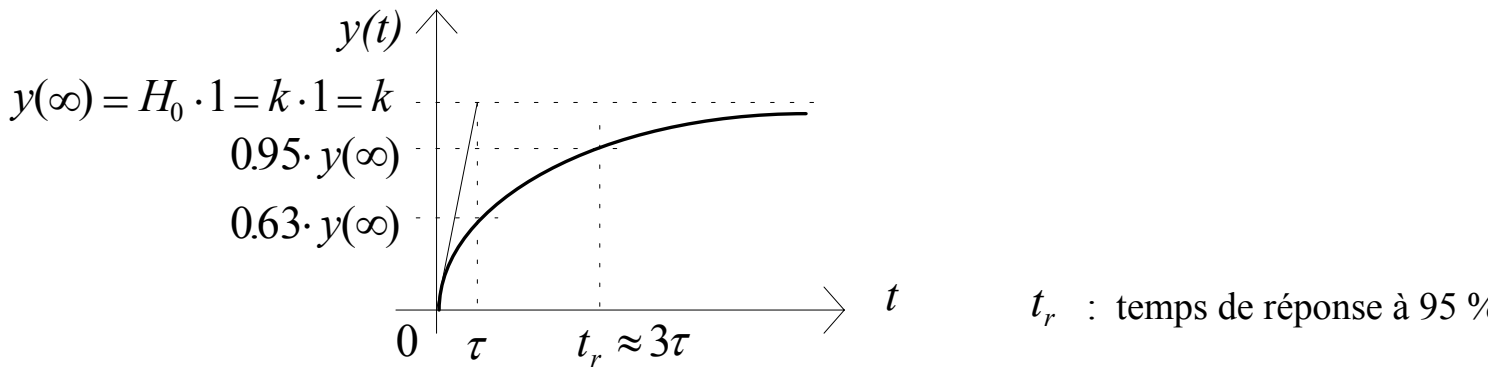
- Réponse Impulsionnelle (RI) :

$$h(t) = TL^{-1}[H(p)] = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau} \Gamma(t) = \frac{k}{\tau} e^{p_0 t} \Gamma(t)$$



- Réponse indicielle :

$$y(t) = TL^{-1}\left[H(p) \cdot TL[\Gamma(t)]\right] = TL^{-1}\left[H(p) \frac{1}{p}\right] = k(1 - e^{-t/\tau})\Gamma(t) = k(1 - e^{-t/\tau})$$



2.1.3. Dualité Temporel - Fréquentiel

Temps

- Constante de temps τ

$$Re[p\hat{o}le] = -\frac{1}{\tau}$$

τ petit $\equiv |Re[p\hat{o}le]|$ élevé \equiv système rapide (ω_c élevé)

- H_0

Fréquence

- Pulsation de coupure

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

- H_0

2.2. Modèle du 2nd ordre (intégrateur (≡ passe-bas))

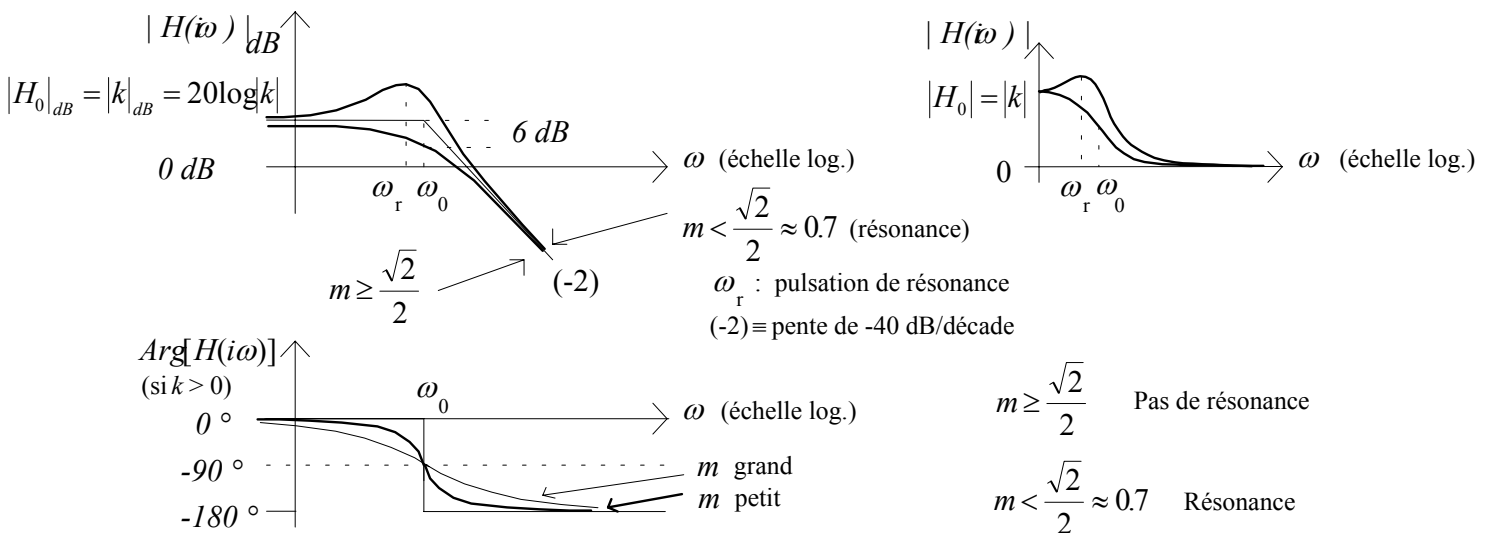
- FT :

$$H(p) = \frac{k}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2m}{\omega_0} p + 1} \quad \left| \begin{array}{l} k : \text{Gain statique } [\equiv \text{gain } H(i\omega) \text{ à } \omega = 0] \text{ noté } H_0 \quad (\omega = 0 \leftrightarrow t = \infty) \\ \omega_0 : \text{Pulsation propre non amortie } (\omega_0 > 0) \\ m = \text{Facteur d'amortissement } (m > 0) \end{array} \right.$$

$$H(i\omega) = \frac{k}{1 + 2mi \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Réponse Fréquentielle :

2.2.1. Etude fréquentielle



Pulsation de résonance : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$

Facteur de résonance : $Q = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}} \quad (Q_{dB} = 20 \log Q)$

$$Q = \frac{|H(i\omega)|_{\text{maxi}}}{|H(i\omega)|_{\text{à } \omega=0}}$$

2.2.2. Etude temporelle

- Réponse Impulsionnelle (RI) :

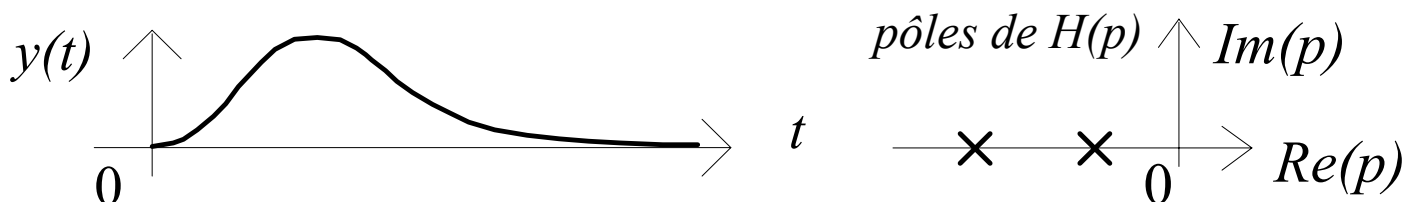
$$y(t) = TL^{-1}\left[H(p) \cdot TL[\delta(t)]\right] = TL^{-1}\left[H(p)\right] \quad 3 \text{ cas :}$$

- $m > 1$: régime hyper-amorti (apériodique) :

$$2 \text{ pôles réels de } H(p) : \quad p_{1,2} = -m\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$$

$$y(t) = \frac{k\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} \left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t} \right) \Gamma(t) = \frac{k\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \Gamma(t)$$

$$\text{en posant } \tau_1 \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{p_1} \text{ et } \tau_2 \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{p_2}$$

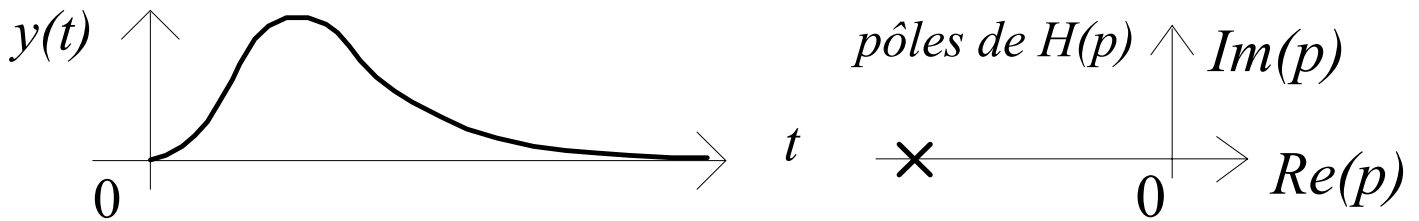


Un mode dû à un pôle réel est non oscillant.

- $m = 1$: régime critique (apériodique) :

1 pôle double réel de $H(p)$: $p_0 = -m\omega_0 = -\omega_0$

$$y(t) = k\omega_0^2 e^{-\omega_0 t} t \Gamma(t) = k\omega_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}} t \Gamma(t) \quad \text{avec : } \tau \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{p_0}$$



Un mode dû à un pôle réel est non oscillant.

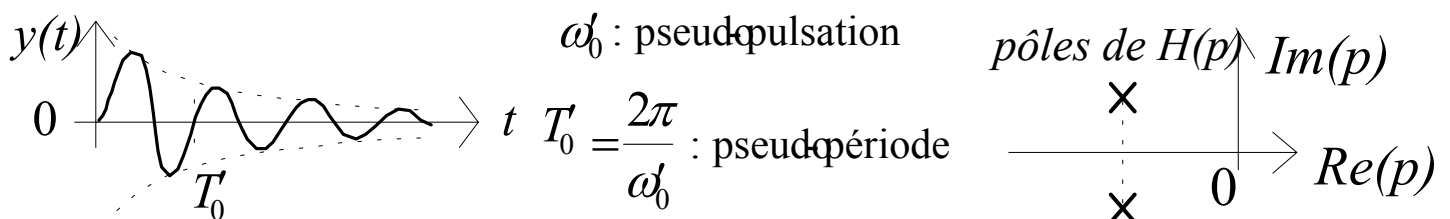
- $0 < m < 1$: régime sous-amorti (pseudo-périodique) :

2 pôles complexes conjugués de $H(p)$: $(\sigma = m\omega_0; \omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - m^2})$

$$p_{1,2} = -m\omega_0 \pm i\omega_0 \sqrt{1 - m^2} = -\sigma \pm i\omega'_0$$

$$y(t) = \left[k\omega_0 \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1 - m^2}} \sin(\omega'_0 t) \right] \Gamma(t) = \left[k\omega_0 \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\sqrt{1 - m^2}} \sin(\omega'_0 t) \right] \Gamma(t)$$

en posant $\tau \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{Re(p_1)} = -\frac{1}{Re(p_2)}$



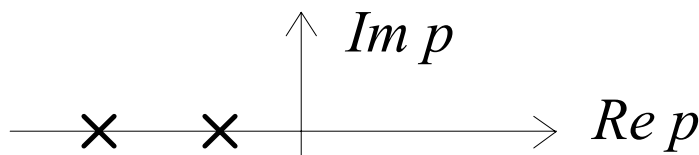
Un mode dû à 2 pôles complexes conjugués est pseudo-oscillant

- Réponse indicielle :

$$y(t) = TL^{-1}\left[H(p) \cdot TL[\Gamma(t)]\right] = TL^{-1}\left[H(p) \frac{1}{p}\right] \quad \text{3 cas :}$$

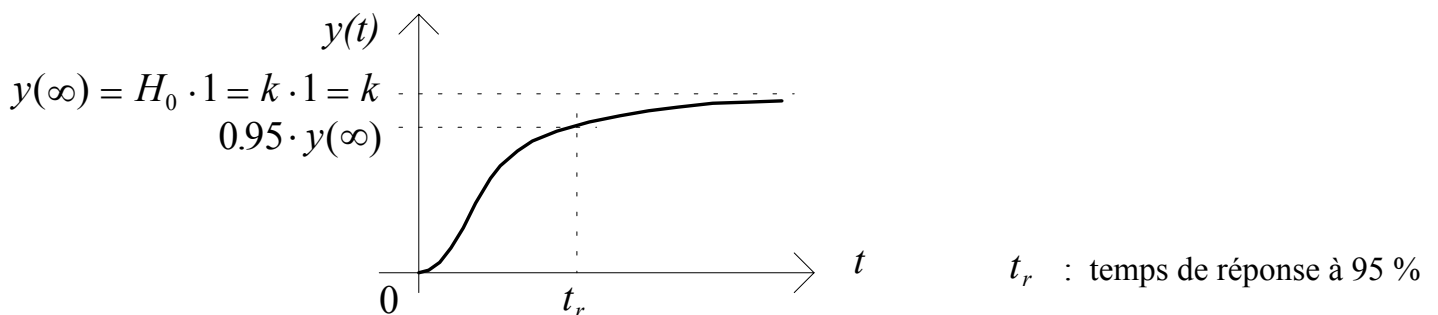
• $m > 1$: régime hyper-amorti (apériodique) :

2 pôles réels de $H(p)$:
$$p_{1,2} = -m\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$$



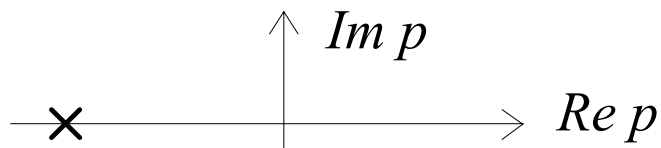
$$y(t) = k \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{m^2 - 1}} \left(\frac{e^{p_1 t}}{m + \sqrt{m^2 - 1}} - \frac{e^{p_2 t}}{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right) \right] \Gamma(t) = k \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{m^2 - 1}} \left(\frac{e^{\frac{t}{\tau_1}}}{m + \sqrt{m^2 - 1}} - \frac{e^{\frac{t}{\tau_2}}}{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right) \right] \Gamma(t)$$

en posant : $\tau_1 \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{p_2}$



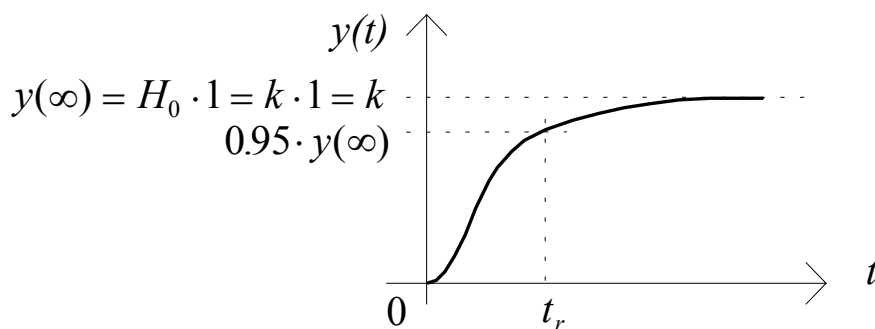
- $m = 1$: régime critique (apériodique) :

1 pôle double réel de $H(p)$: $p_0 = -m\omega_0 = -\omega_0$



$$y(t) = k \left[1 - e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t) \right] \Gamma(t) = k \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} (1 + \omega_0 t) \right] \Gamma(t)$$

avec : $\tau = -\frac{1}{p_0}$

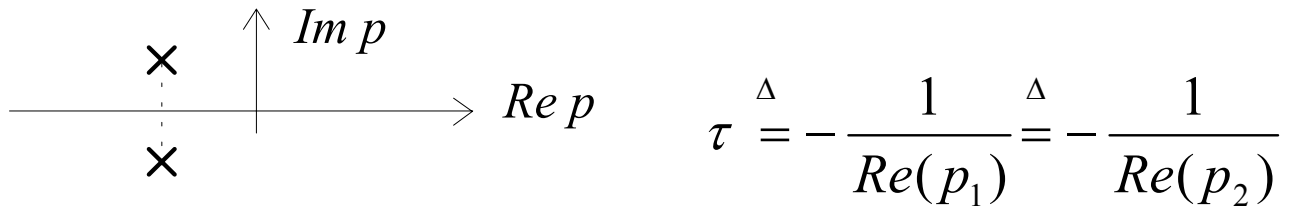


t_r : temps de réponse à 95 %

- $0 < m < 1$: régime sous-amorti (pseudo-périodique) :

2 pôles complexes conjugués de $H(p)$: $(\sigma = m\omega_0; \omega'_0 = \omega_0\sqrt{1-m^2})$

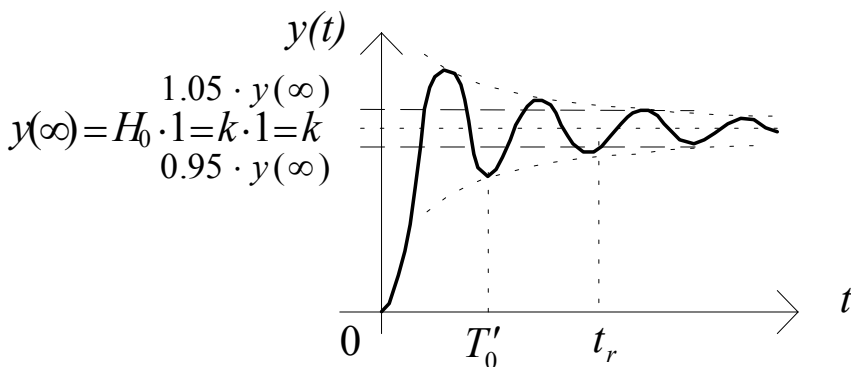
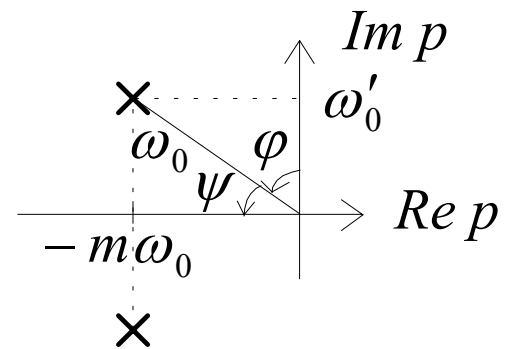
$$p_1 = -m\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-m^2} = -\sigma \pm i\omega'_0$$



$$y(t) = k \left[1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega'_0 t + \psi) \right] \Gamma(t) = k \left[1 - \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega'_0 t + \psi) \right] \Gamma(t)$$

$$\psi = \arccos m = \arcsin \sqrt{1-m^2} \quad (\cos \psi = m \quad \sin \psi = \sqrt{1-m^2})$$

$$\varphi \stackrel{\Delta}{=} \frac{\pi}{2} - \psi = \arcsin m = \arccos \sqrt{1-m^2}$$



ω'_0 : pseudo - pulsation

$T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0}$: pseudo - période

t_r : temps de réponse à 95 %

2.2.3. Dualité Temporel - Fréquentiel

Temps

- amortissement m
- Temps de réponse t_r
- $Re[pôles] = -m\omega_0$

t_r petit $\equiv |Re[pôles]|$ élevé \equiv système rapide ω_0 élevé

- H_0

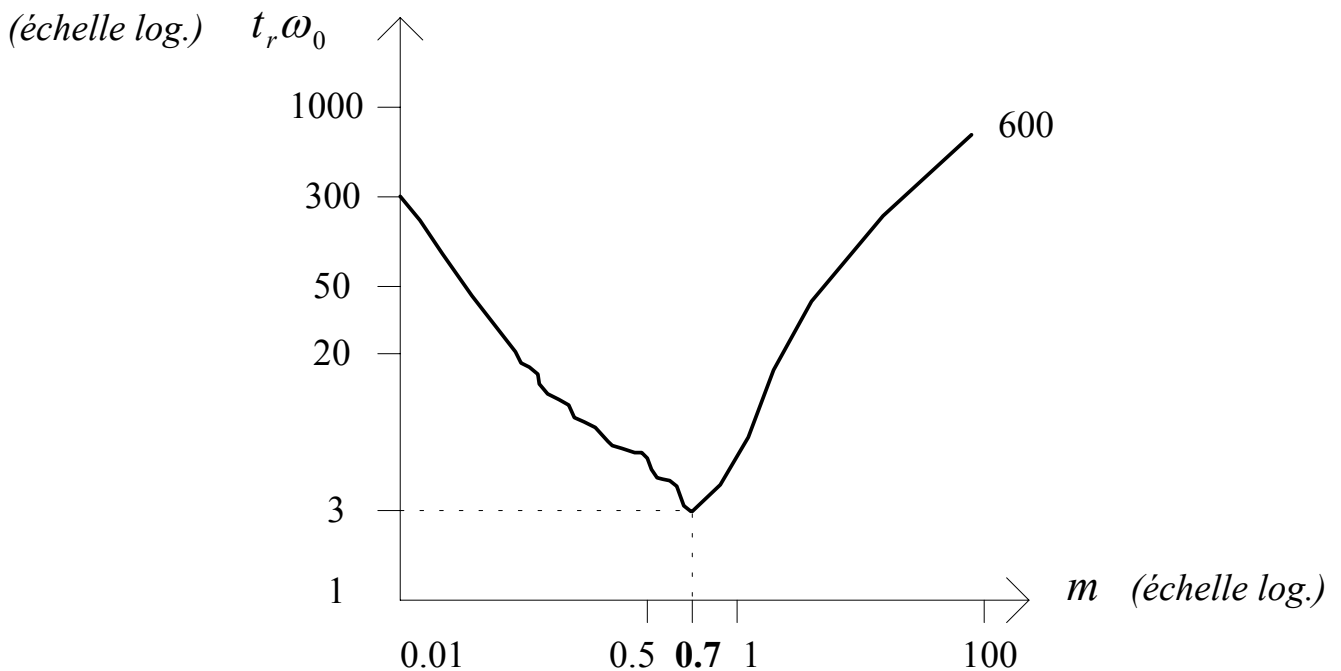
Fréquence

- amortissement m
- Pulsation ω_0

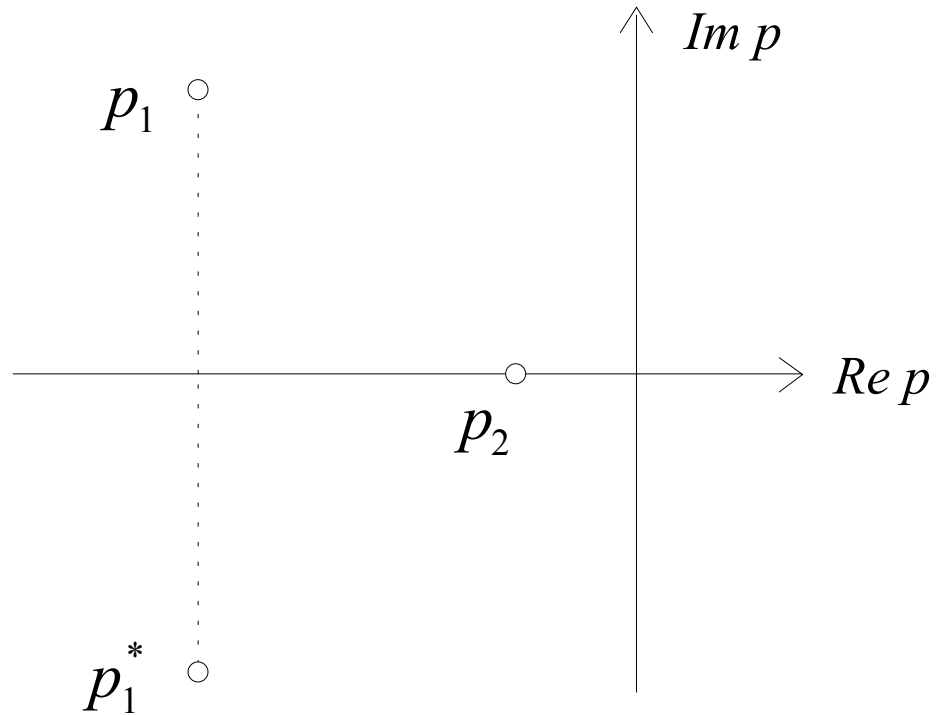
- H_0

2.2.4. Rapidité

Rapidité vue d'après le temps de réponse



A ω_0 fixé, le temps de réponse minimal est obtenu pour $m = 0.7$

Rapidité vue d'après le lieu des pôles

t_r petit $\equiv |Re[p\hat{o}le]|$ élevé \equiv système *rapide*

2.3. Systèmes d'ordre supérieur à 2

Système dont la FT $H(p)$, du $k^{\text{ième}}$ ordre, admet donc k pôles.

$H(p)$ peut être décomposée en produit de plusieurs FT (éléments simples).

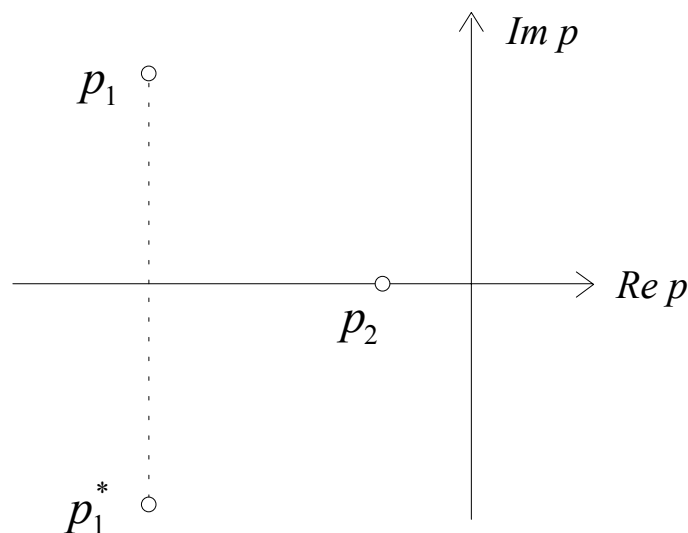
→ Réponse du système = somme des réponses des sous-systèmes.

Réponse plus fortement marquée par les pôles situés près de l'axe imaginaire (*pôles dominants*) car ils correspondent aux C^{tes} de Temps les plus élevées ($Re(\text{pôle})$ est en $-1/\tau$).

→ On peut souvent négliger les pôles éloignés de l'axe imaginaire par rapport aux *pôles dominants*.

Exemple (lieu des pôles) :

3ème ordre (3 pôles) constitué d'un sous-système du 1er ordre (pôle P_2) et d'un sous-système du 2nd ordre (pôles P_1 et P_1^*)



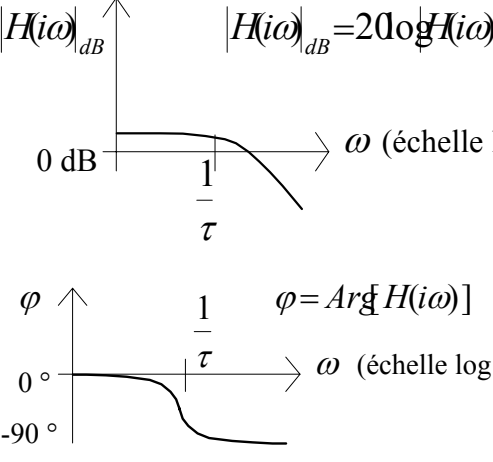
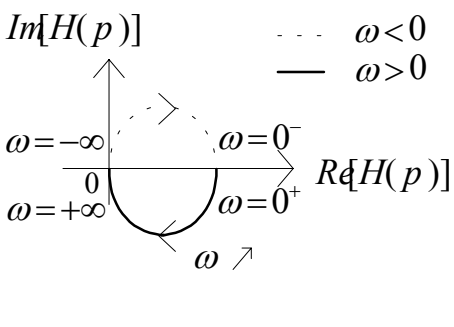
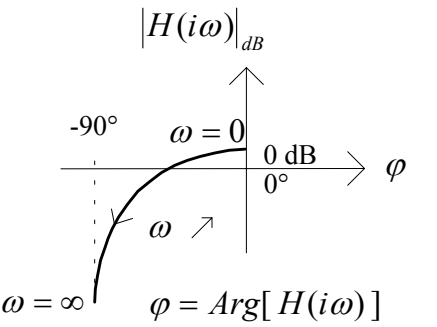
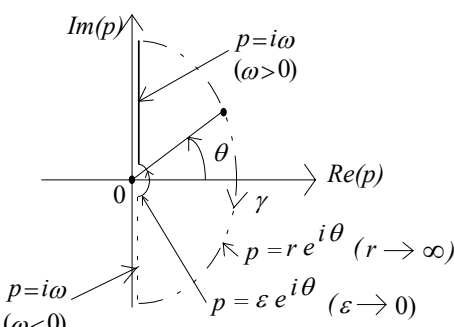
Pôle dominant (\equiv mode lent) situé le plus près de l'axe imaginaire : P_2

→ 3ème ordre \sim 1er ordre (pôle P_2).

3. Représentation graphique de la Réponse Fréquentielle $H(i\omega)$

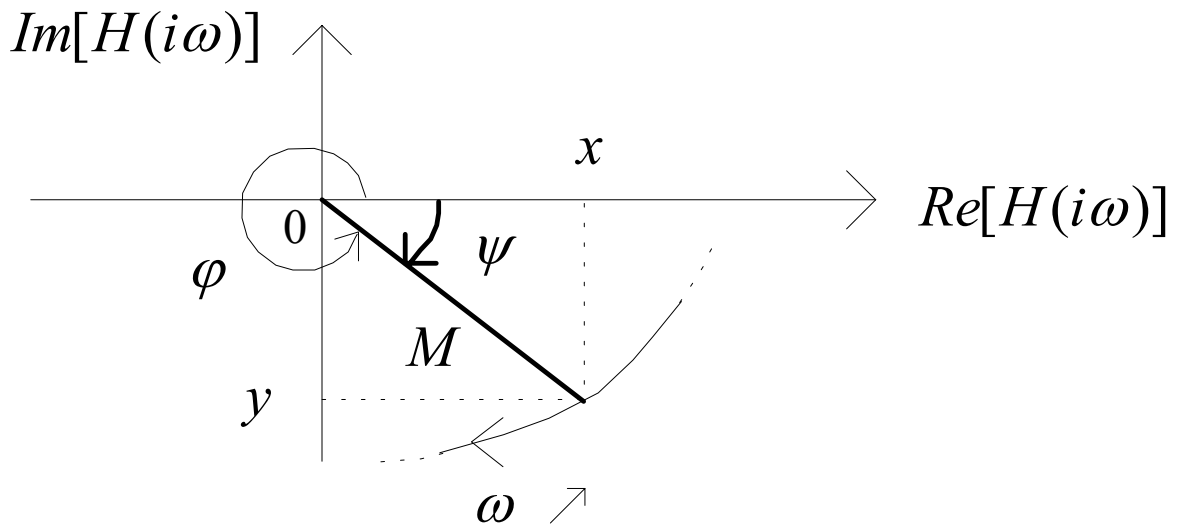
Exemple : Représentation d'un 1er ordre :
$$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

(avec : $\tau > 0$, $k > 0$ ($k > 1$))

<i>Représentation de Bode</i>	<i>Représentation de Nyquist</i>	<i>Représentation de Black</i>
 <p>$H(i\omega) _{dB} = 20 \log H(i\omega)$</p> <p>$\phi = \text{Arg}[H(i\omega)]$</p>	 <p>Courbe paramétrée en ω</p>	 <p>Courbe paramétrée en ω</p>
<p>Domaine de variation de p</p> <p>Limité à $p = i\omega$ ($\omega > 0$)</p>	<p>Domaine de variation de p</p> <p>Contour de Bromwich :</p> 	<p>Domaine de variation de p</p> <p>Limité à $p = i\omega$ ($\omega \geq 0$)</p>
<p><i>Avantage :</i></p> <p>Visuelle et simple.</p>	<p><i>Avantage :</i></p> <p>Générale, puissante.</p>	<p><i>Avantage :</i></p> <p>Prédiction du SB à partir de la BO.</p>
<p><i>Inconvénient :</i></p> <p>Pas générale (stabilité).</p>	<p><i>Inconvénient :</i></p> <p>Plus abstraite.</p>	<p><i>Inconvénient :</i></p> <p>Pas générale (stabilité).</p>

Passage de la représentation de Bode aux Représentation de Nyquist/Black :

Rappel : passage des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires



$$H(i\omega) = x + iy$$

$$M = |H(i\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$M_{dB} = 20 \log M = 20 \log |H(i\omega)| = |H(i\omega)|_{dB}$$

$$\varphi = \text{Arg}[H(i\omega)] = \text{Arctg} \frac{y}{x}$$

$$\psi = \varphi - 2\pi = \varphi$$

4. ANNEXE : Représentations de Bode de RF élémentaires

Gain complexe $H(i\omega)$	Module $ H(i\omega) _{dB} = 20 \log H(i\omega) $	Phase $Arg[H(i\omega)]$
$H(i\omega) = i \frac{\omega}{\omega_0}$		
$H(i\omega) = \frac{1}{i \frac{\omega}{\omega_0}}$		
$H(i\omega) = \left(i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^n$		
$H(i\omega) = 1 + i \frac{\omega}{\omega_0}$		
$H(i\omega) = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}$		
$H(i\omega) = \left(1 + i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^n$		
Octave : $f \rightarrow 2f$ Décade : $f \rightarrow 10f$	Pente : $(-n) \equiv$ pente de $-20 n$ dB/décade \equiv pente de $-6 n$ dB/octave $(+n) \equiv$ pente de $+20n$ dB/décade \equiv pente de $+6 n$ dB/octave	