

2. Performances d'un Système : Stabilité - Précision - Rapidité

STABILITE

Condition générale de stabilité

Stabilité au sens strict

(système asymptotiquement stable, stabilité au sens de Lyapunov)

Il y a retour à l'équilibre après disparition de la perturbation.

Il est instable s'il n'y revient pas ou s'il s'en écarte.

Exemple : pendule simple 

Autre définition de la stabilité (au sens large) :

A entrée bornée correspond une sortie bornée pour le système.

Critère général de stabilité des systèmes à TC



Théorème : (hypothèse de causalité)

TC : Un système linéaire à TC est stable si et seulement si tous les pôles de sa FT ont leur partie réelle strictement négative.

TD : TC \rightarrow TD : $z = e^{pT}$ (T : période d'échantillonnage)

Un système linéaire à TD est stable si et seulement si tous les pôles de sa FT ont leur module strictement inférieur à 1.

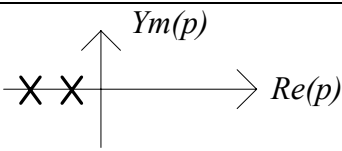
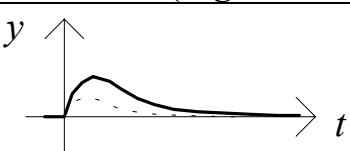
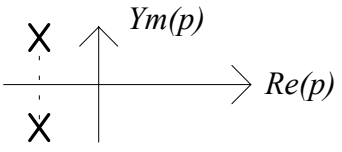
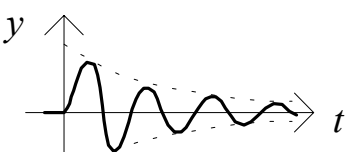
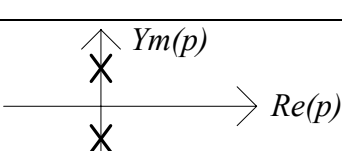
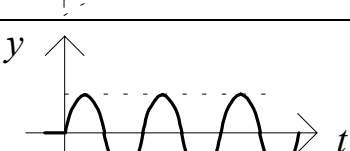
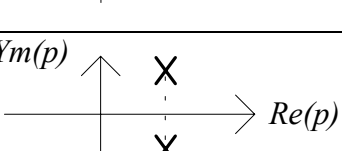
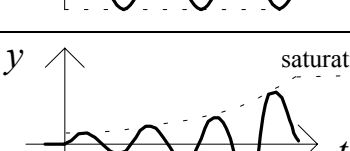
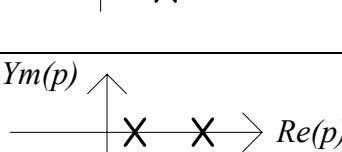

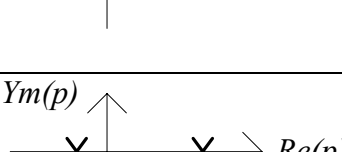
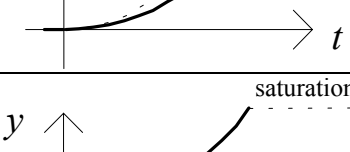
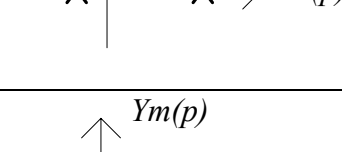
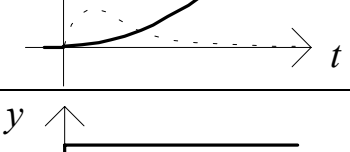
Les *pôles* d'un système caractérisent sa *dynamique (stabilité)*.

Les *zéros* déterminent sa *rapidité (phase minimale)*.

Lieu des pôles de la FT et stabilité (systèmes à TC)

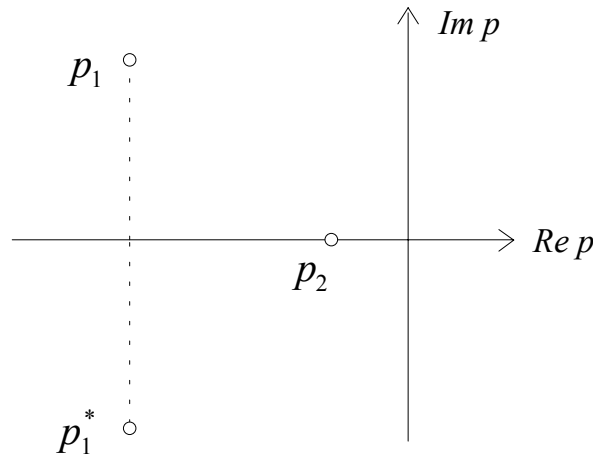
Plus les pôles de la FT sont éloignés de l'axe imaginaire (avec partie réelle < 0), plus le système est stable (et rapide).

Exemple : 2nd ordre (2 pôles)

Pôles	Modes (régime libre) (RI)	Stabilité
		Stable
		Stable
		Juste instable (oscillant)
		Instable
		Instable
		Instable
		Juste instable (astatique)

Exemple :

3ème ordre (3 pôles) constitué d'un sous-système du 1er ordre (pôle p_2) et d'un sous-système du 2nd ordre (pôles p_1 et p_1^*)



Critère algébrique de stabilité de Routh des systèmes à TC

Soit $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ la FT d'un système linéaire continu (\equiv à TC)

$Q(p)$: polynôme caractéristique de la stabilité

Stabilité de $H(p)$: $\text{---} \boxed{H(p)} \text{---}$ $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

$\boxed{Q(p) = D(p)}$

Stabilité du Système Bouclé $H'(p)$:

$$H'(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{N(p)}{D(p)}}{1 + \frac{N(p)}{D(p)}} = \frac{N(p)}{N(p) + D(p)} \quad \boxed{Q(p) = N(p) + D(p)}$$

$$Q(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad a_n \geq 0 \quad n > 0$$

Critère de Routh

1. Si certains coeffs $a_i \leq 0$, $Q(p)$ a des racines à partie réelle ≥ 0
 Le système est donc instable (cas où au moins un $a_i < 0$), ou juste instable (cas où au moins un $a_i = 0$ avec les autres coeffs ≥ 0).

2. Tableau de Routh

On écrit	$\left\{ \begin{array}{l} p^n : \\ p^{n-1} : \end{array} \right.$	$\begin{array}{c} a_n \\ a_{n-1} \end{array}$	$\begin{array}{c} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{array}$	$\begin{array}{c} a_{n-4} \\ a_{n-5} \end{array}$	\dots	$\begin{array}{l} a_1 \text{ si } n \text{ impair} \\ \text{ou } a_0 \text{ si } n \text{ pair} \\ a_1 \text{ si } n \text{ pair} \\ \text{ou } a_0 \text{ si } n \text{ impair} \end{array}$
On calcule	$\left\{ \begin{array}{l} p^{n-2} : \\ p^{n-3} : \\ \vdots \\ p^2 : \\ p^1 : \\ p^0 : \end{array} \right.$	$\begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ M_1 \\ N_1 \\ O_1 \end{array}$	$\begin{array}{c} A_2 \\ B_2 \\ \vdots \\ M_2 \\ N_2 \\ O_2 \end{array}$	$\begin{array}{c} A_3 \\ B_3 \\ \vdots \\ M_3 \\ N_3 \\ O_3 \end{array}$	\dots	

\uparrow
 On analyse

Calculs

Pivot : a_{n-1} :

$$A_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad A_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

Pivot : A_1 :

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1} \quad B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}$$

...

Pivot : N_1 :

$$O_1 = \frac{N_1 M_2 - M_1 N_2}{N_1}$$

Théorème

Une CNS de stabilité du système est que tous les coefficients de la 1ère colonne du tableau de Routh soient > 0 .

Le nombre de changements de signe des coefficients de la 1ère colonne est égal au nombre de pôles instables.

• *Cas particuliers*

1. Il apparaît un 0 dans la 1ère colonne seulement :

Un coeff. nul dans la 1ère colonne indique la présence d'une (ou des) racine(s) juste instable(s) ou instable(s) de $Q(p)$

Poursuite de la construction du tableau :

On remplace $0 \rightarrow \varepsilon \ll 1$ et positif

2. Si la construction du tableau de Routh fait apparaître une ligne de 0 sur la ligne p^i :

Un coeff. nul dans la 1ère colonne indique la présence d'une (ou des) racine(s) juste instable(s) ou instable(s) de $Q(p)$

Poursuite de la construction du tableau :

On forme : $A(p) = q_1 p^{i+1} + q_2 p^{i-1} + \dots$ (puissances de $p \geq 0$).

$$A'(p) = r_1 p^i + r_2 p^{i-2} + \dots \quad (\text{puissances de } p \geq 0)$$

La ligne de remplacement p^i est :

$$p^i : \quad r_1 \quad r_2 \quad \dots$$

Exemple :

Stabilité du SB (à retour unitaire et comparateur +/-) de BO $H(p)$ en fonction du gain K de l'amplificateur de la BO :

Système en Boucle Ouverte (BO) :
$$H(p) = \frac{K}{p(5p^2 + p + 10)}$$

Système en Boucle Fermée (BF) :
$$H'(p) = \frac{K}{5p^3 + p^2 + 10p + K}$$

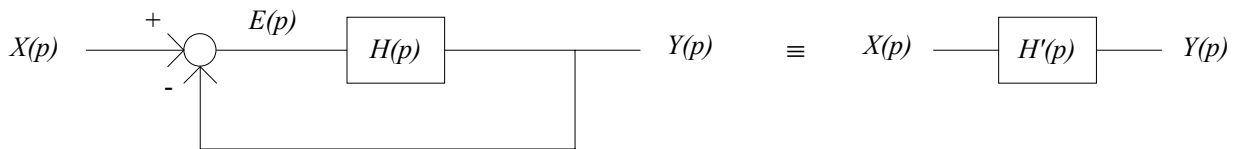
Polynôme caractéristique :
$$Q(p) = 5p^3 + p^2 + 10p + K$$

Tableau de Routh :

$$\begin{array}{l|ll} p^3 : & 5 & 10 \\ p^2 : & 1 & K \\ p^1 : & 10 - 5K & 0 \\ p^0 : & K & 0 \end{array}$$

Le Système Bouclé (SB) $H'(p)$ est stable si : $0 < K < 2$.

Critère de stabilité de Nyquist des systèmes à TC



$$H'(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$$

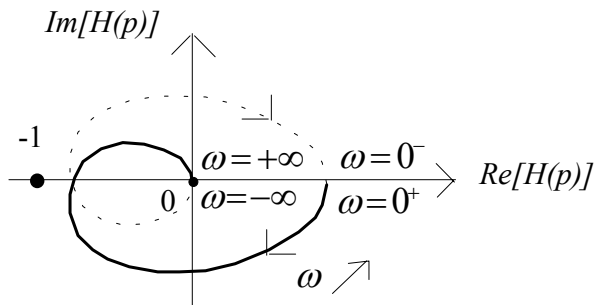
- Soit :
- n'_+ : le nombre de pôles à partie réelle > 0 de $H'(p)$
 - n_+ : le nombre de pôles à partie réelle > 0 de $H(p)$
 - t : le nombre de tours comptés algébriquement dans le sens trigonométrique du lieu de $H(p)$ autour du point -1 .

On a : $\boxed{t = n_+ - n'_+}$ ou encore : $\boxed{n'_+ = n_+ - t}$

Theorème de Nyquist

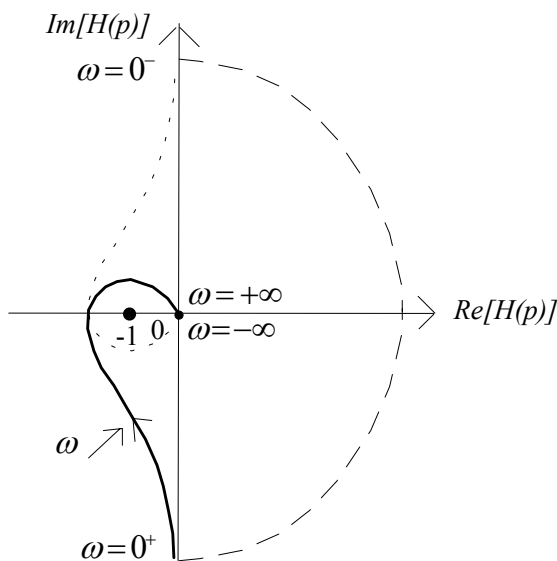
Un Système Bouclé est stable ($\equiv (n'_+ = 0)$) si et seulement si le nombre t de tours autour du point -1 du lieu de la BO est égal au nombre de pôles à partie réelle > 0 ($\equiv n_+$) de la BO.

Exemple 1 :
$$H(p) = \frac{K}{(p+a)(p+b)(p+c)}$$



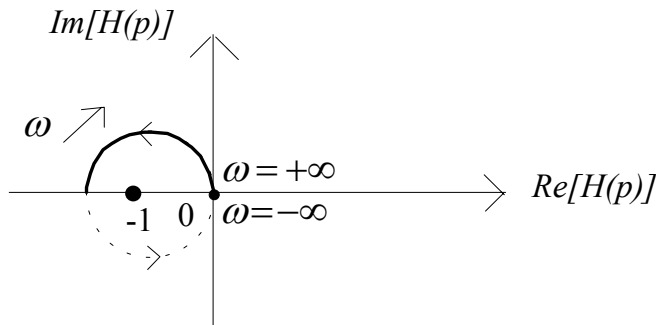
$t = 0 \rightarrow$ Système *stable* (sens large) en *BF* ($n'_+ = 0$) si système stable (sens large) en *BO*, or ici $n_+ = 0 \rightarrow$ *SB* stable

Exemple 2 :
$$H(p) = \frac{K}{p(p+b)(p+c)}$$



$t = -2 \rightarrow$ Système *instable* en *BF*
 ($n'_+ = n_+ - t > 0$, car n_+ ne peut être < 0)

Exemple 3 :
$$H(p) = \frac{Kp}{p + a}$$



$t = 1 \rightarrow$ Système *stable* (sens large) en *BF* ($n'_+ = 0$) si système instable en *BO* avec 1 pôle instable, or ici $n_+ = 0$

Critère du revers

(critère simplifié, moins général que le critère de Nyquist)

Soit à déterminer si un SB $H'(p)$ de BO $H(p)$ est stable (SB à comparateur +/- : $H'(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$)

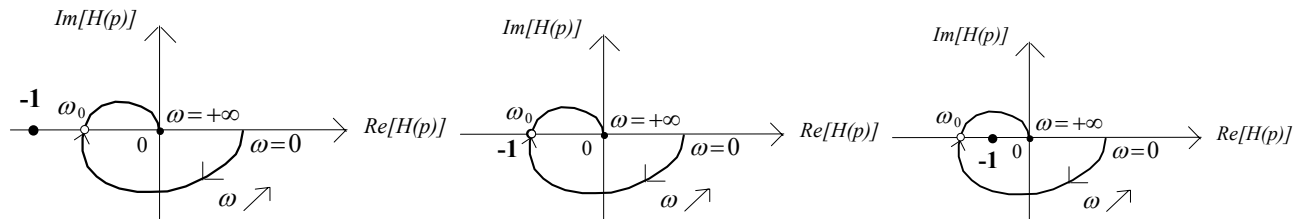
. On se restreint à des systèmes stables en BO (au sens large, c'est-à-dire tels que $n_+ = 0$)

. On limite le tracé du lieu de Nyquist de la BO pour \mathcal{P} restreint à la branche $p = i\omega$ ($\omega > 0$) du contour de Bromwich

Critère du revers dans le plan de Nyquist

Si lorsqu'on parcourt le lieu de la BO $H(i\omega)$ dans le sens des $\omega \nearrow$ (ω varie de 0 à $+\infty$), on laisse sur sa gauche le point -1 lorsqu'on se trouve à ω_0 telle que $Arg[H(i\omega_0)] = -\pi$, le SB est stable

Exemple :
$$H(p) = \frac{K}{(p+a)(p+b)(p+c)}$$



SB stable

SB limite stable

SB instable

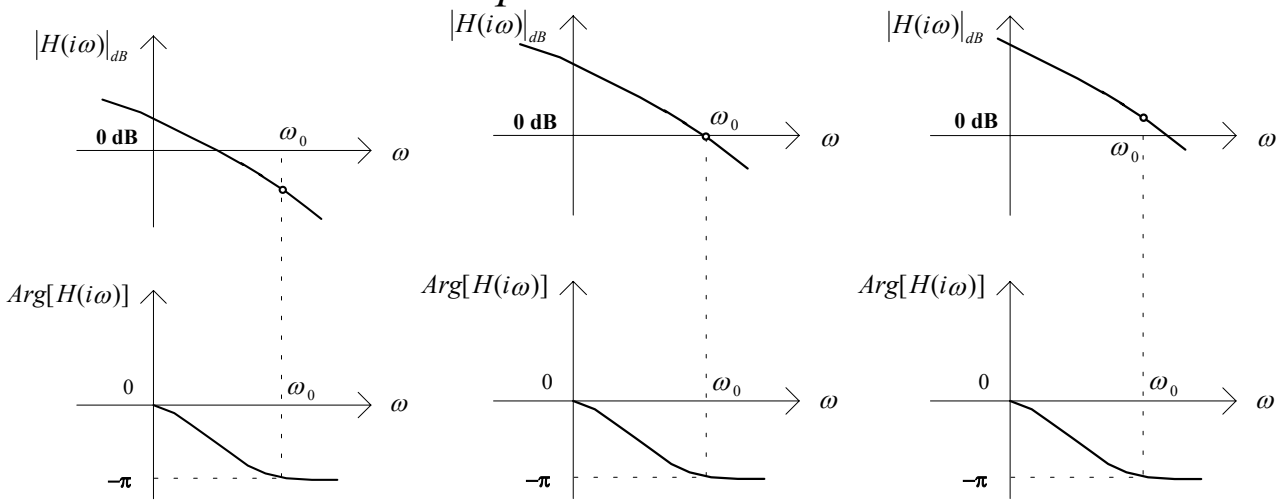
Critère du revers algébrique

Soit ω_0 telle que $Arg[H(i\omega_0)] = -\pi$. Si $|H(i\omega_0)| < 1$: SB stable

.Si $|H(i\omega_0)| = 1$: SB limite stable

.Si $|H(i\omega_0)| > 1$: SB instable

Critère du revers dans le plan de Bode



SB stable

SB juste stable

SB instable

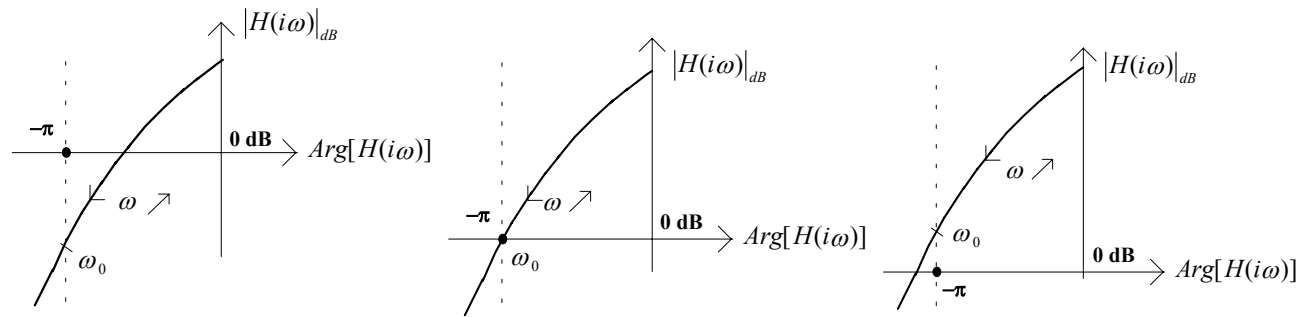
$|H(i\omega_0)|_{dB} < 0dB$

$|H(i\omega_0)|_{dB} = 0dB$

$|H(i\omega_0)|_{dB} > 0dB$

ω_0 : pulsation telle que $Arg[H(i\omega_0)] = -\pi$

Critère du Revers dans le plan de Black



SB stable

$$|H(i\omega_0)|_{dB} < 0dB$$

SB juste stable

$$|H(i\omega_0)|_{dB} = 0dB$$

SB instable

$$|H(i\omega_0)|_{dB} > 0dB$$

ω_0 : pulsation telle que $Arg[H(i\omega_0)] = -\pi$

Lieu des Racines (lieu d'Evans)

$$FTBO : H(p) = K \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

Stabilité de la FTBF : racines de : $D(p) + K \cdot N(p) = 0$

Polynôme caractéristique $Q(p)$: $Q(p) = D(p) + K \cdot N(p) = 0$

Lorsque le gain K varie de 0 à $+\infty$, les racines du polynôme caractéristique décrivent dans le plan complexe le lieu des racines.

Exemple :

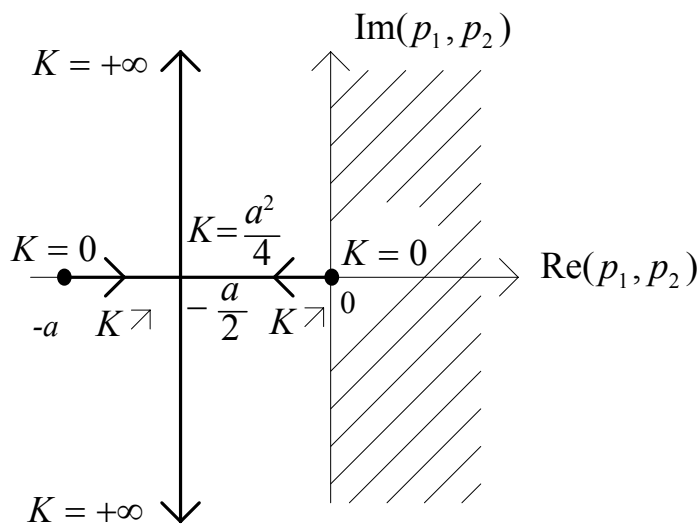
$$BO : H(p) = \frac{K}{p(p+a)} \rightarrow \text{Polynôme caractéristique :}$$

$$Q(p) = p(p+a) + K = 0 \rightarrow p^2 + ap + K = 0$$

Racines de $Q(p)$:

$$(\Delta \geq 0) : \begin{cases} p_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - K} \\ p_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - K} \end{cases}$$

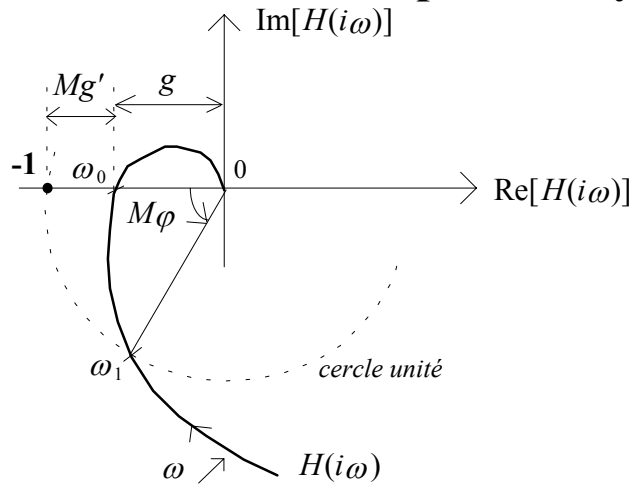
$$(\Delta < 0) : \begin{cases} p_1 = -\frac{a}{2} + i\sqrt{K - \frac{a^2}{4}} \\ p_2 = -\frac{a}{2} - i\sqrt{K - \frac{a^2}{4}} \end{cases}$$



Système bouclé Stable $\forall K > 0$

Marges de stabilité

Marges de stabilité dans le plan de Nyquist



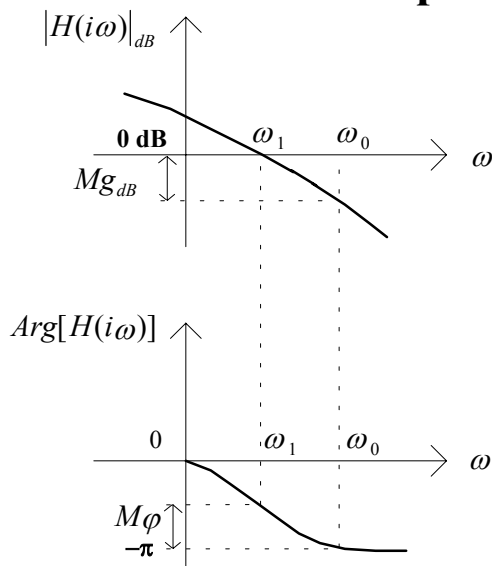
Soit ω_0 telle que : $Arg[H(i\omega_0)] = -\pi$:

$$Mg_{dB} = 20 \log \frac{1}{g} = -20 \log g = -20 \log |H(i\omega_0)|$$

Soit ω_1 telle que : $|H(i\omega_1)| = 1$:

$$M\varphi = \pi + Arg[H(i\omega_1)]$$

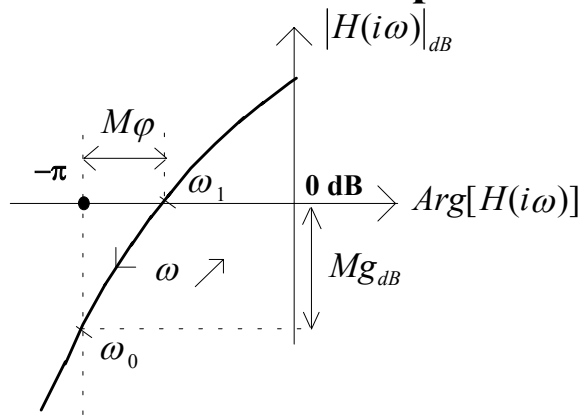
Marges de stabilité dans le plan de Bode



Soit ω_0 telle que : $Arg[H(i\omega_0)] = -\pi$: $Mg_{dB} = -|H(i\omega_0)|_{dB}$

Soit ω_1 telle que : $|H(i\omega_1)|_{dB} = 0 \text{ dB}$: $M\varphi = \pi + Arg[H(i\omega_1)]$

Marges de stabilité dans le plan de Black



Soit ω_0 telle que : $Arg[H(i\omega_0)] = -\pi$: $Mg_{dB} = -|H(i\omega_0)|_{dB}$

Soit ω_1 telle que : $|H(i\omega_1)|_{dB} = 0 \text{ dB}$: $M\varphi = \pi + Arg[H(i\omega_1)]$

Valeurs de $M\varphi$ et Mg assurant une bonne marge de stabilité :

$$\begin{cases} M\varphi = 45^\circ \\ Mg_{dB} = 10 \text{ dB} \end{cases} \text{ (valeurs usuelles)}$$

Abaque de Black

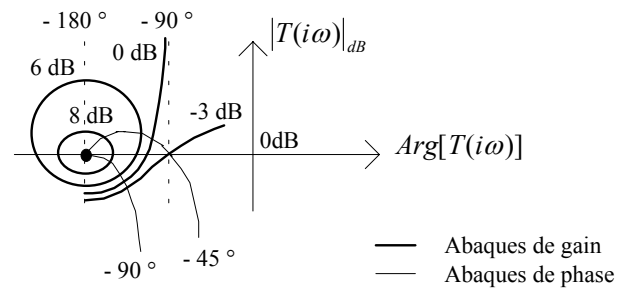
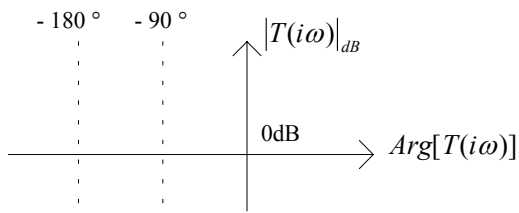
Lecture de l'abaque de Black



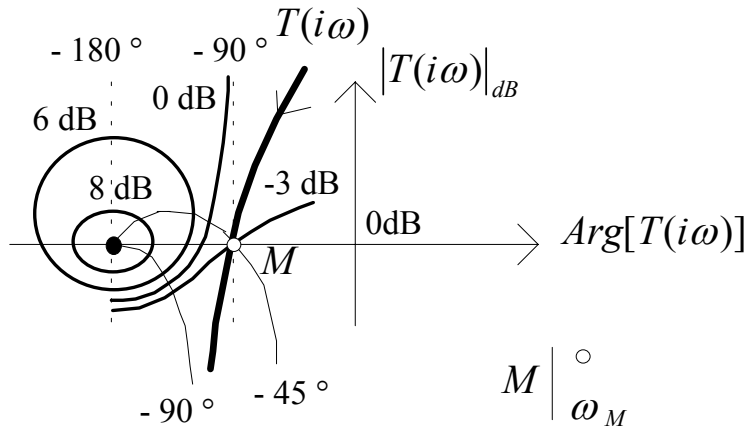
$$T(p) \quad : \text{ FTBO} \qquad T'(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \quad : \text{ FTBF}$$

Tracé BO $T(i\omega)$ (coordonnées rectangulaires) \rightarrow

Abaques $|T'(i\omega)|_{dB}$ et $Arg[T'(i\omega)]$ (coordonnées curviligne)



Exemple :



A ω_M , $T(i\omega)$ est tel que :

$$\begin{cases} |T(i\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \text{Arg } T(i\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

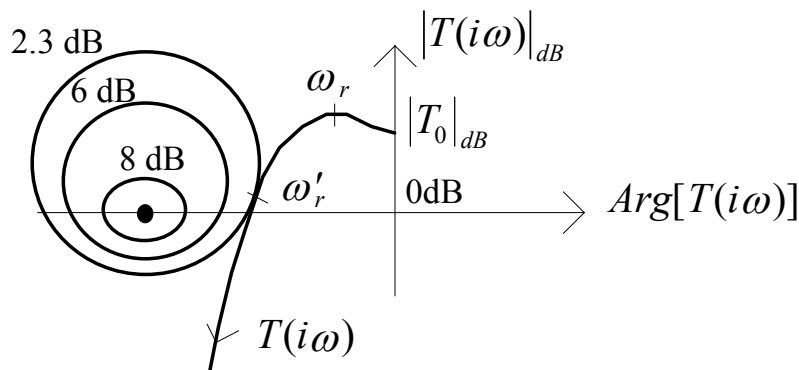
Abaques \rightarrow BF :

$$\begin{cases} |T'(i\omega)|_{dB} = -3 \text{ dB} \\ \text{Arg } T'(i\omega) = -45^\circ \end{cases}$$

Résonance en BF

Le contour de l'abaque (en dB) que le lieu de la BO $T(i\omega)$ tangente, indique la valeur maximale du module du gain de la BF $|T'(i\omega)|_{dB}$ et donc le facteur de résonance Q' de la BF et la pulsation de résonance ω'_r de la BF :

Exemple avec une BO résonante :



ω_r : pulsation de résonance (BO) ω'_r : pulsation de résonance (BF)

$|T_0|_{dB}$: gain statique de la BO : $|T_0|_{dB} = |T(i\omega)|_{dB}$ pour $\omega = 0$

$|T'_0|_{dB}$: gain statique de la BF : $|T'_0|_{dB} = |T'(i\omega)|_{dB}$ pour $\omega = 0$:

$$T'_0 = \frac{T_0}{1 + T_0} \quad |T'_0|_{dB} \leq 0 \text{ dB}$$

$T'(i\omega)$ passe par un maximum pour $\omega = \omega'_r$

Dans cet exemple: $Q'_{dB} = 2.3 \text{ dB} - |T'_0|_{dB}$ $Q'_{dB} = |T'(i\omega)|_{dB_{\max}} - |T'_0|_{dB}$

Avec : $|T'_0|_{dB} \approx 0 \text{ dB}$: $Q'_{dB} = 2.3 \text{ dB}$

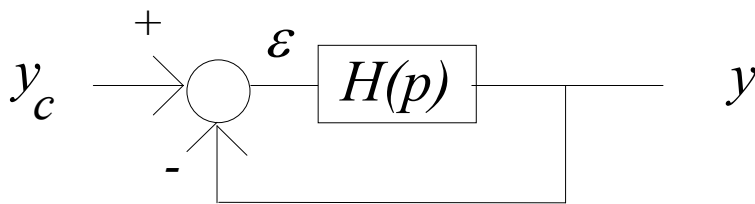
Comme $Q' = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$, on a : $m = 0.42$ (amortissement de la BF) si on assimile la BF à un 2nd ordre.

PRECISION - RAPIDITE

Exemples

- Asservissement de position de l'objectif d'un appareil photo (auto-focus)

Précision

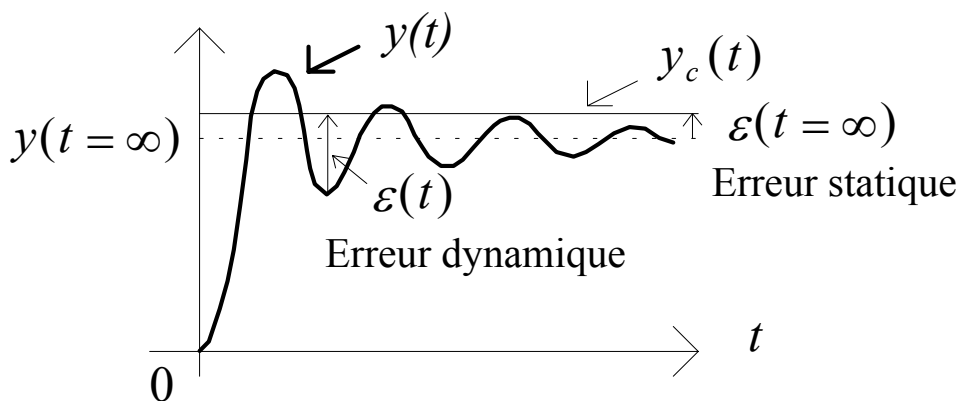


Précision \equiv inverse de l'erreur $\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$

Précision statique \rightarrow erreur statique $\varepsilon(t = \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)$

Précision dynamique \rightarrow erreur dynamique (*transitoire*)

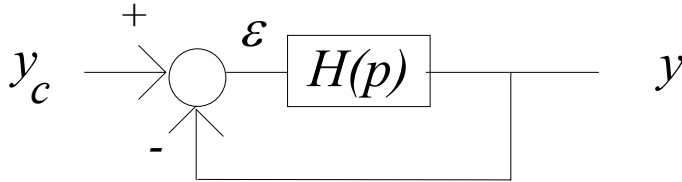
Ex.: réponse indicielle d'un SB du 2nd ordre pseudo-oscillant



La précision \nearrow si $\varepsilon(t) \searrow$ $\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$

Précision des Systèmes Asservis Linéaires (SAL)

Soit le SB de BO $H(p)$ (SB à comparateur +/-)



Erreur $\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$ $E(p) \stackrel{\Delta}{=} TL[\varepsilon(t)]$

$$E(p) = Y_c(p) - Y(p) = Y_c(p) - \frac{H(p)}{1+H(p)} Y_c(p) = Y_c(p) \frac{1}{1+H(p)}$$

Erreur absolue $\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t) \xrightarrow{TL} E(p) = Y_c(p) \frac{1}{1+H(p)}$

Erreur relative ($y_c(t) = C^{te} = y_c$) $\varepsilon(t)_{relative} = \frac{y_c(t) - y(t)}{y_c(t)}$ (%)

Précision statique $\varepsilon \stackrel{\Delta}{=} \varepsilon(t = \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)$

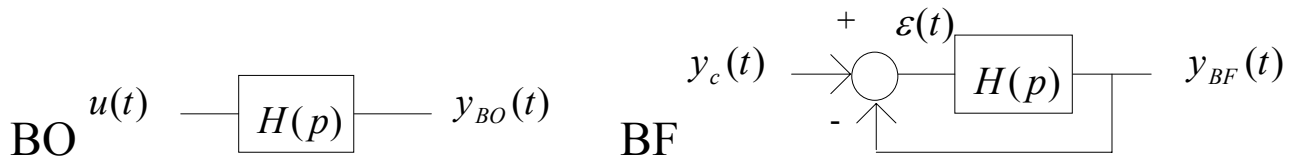
$$\rightarrow \boxed{\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} pY_c(p) \frac{1}{1+H(p)}}$$

Intégrateur (pur)

$K(p)$ possède un intégrateur (pur) si $K(p) = \frac{1}{p} K_1(p)$

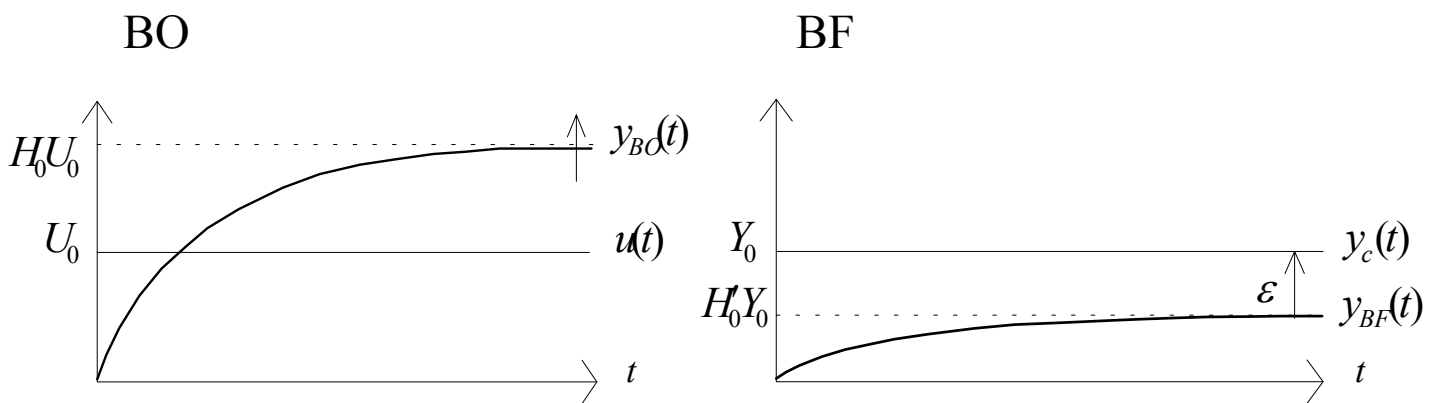
$K(p)$ comporte n intégrateurs (purs) si $K(p) = \frac{1}{p^n} K_1(p)$

Gain en BO et gain en BF



H_0 gain statique de BO H'_0 gain statique de BF $H'_0 = \frac{H_0}{1 + H_0}$

Réponses indicielles non unitaires :



$H_0 \nearrow$ $\varepsilon \searrow$ $H'_0 = \frac{H_0}{1 + H_0} \rightarrow 1$

Précision statique d'un Système Bouclé

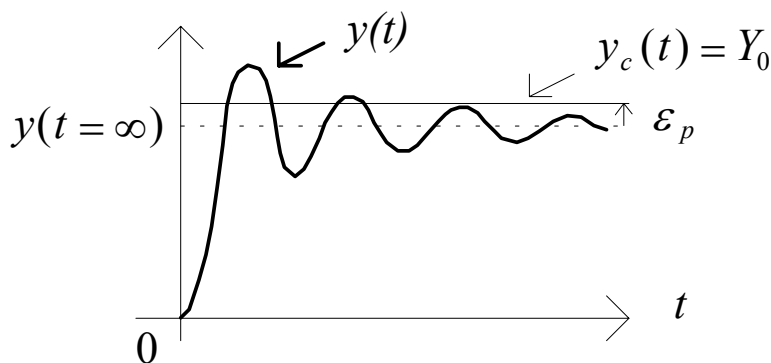
n nombre d'intégrateurs (purs) de la BO $H(p)$ $H(p) = \frac{1}{p^n} H_n(p)$

Entrée de consigne constante (\equiv en échelon)

$\varepsilon(t) \equiv$ erreur de position $\equiv \varepsilon_p(t)$ $\varepsilon \equiv$ erreur statique de position $\equiv \varepsilon_p$

Consigne: échelon d'amplitude Y_0 $y_c(t) = Y_0 \Gamma(t)$ de TL $Y_c(p) = \frac{Y_0}{p}$

Ex. : réponse indicielle d'un SB du 2nd ordre pseudo-oscillant



$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p Y_c(p) \frac{1}{1 + H(p)} \rightarrow \boxed{\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} Y_0 \frac{1}{1 + H(p)}}$$

- $n = 0$: $\varepsilon_p = Y_0 \frac{1}{1 + K_p}$

avec : $K_p \stackrel{\Delta}{=} H_0 \stackrel{\Delta}{=} \lim_{p \rightarrow 0} H(p)$: Gain statique de la BO

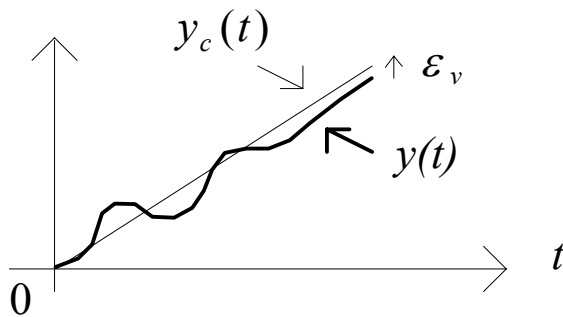
- $n \geq 1$: $\varepsilon_p = 0$

Entrée de consigne en rampe

$$\varepsilon(t) \equiv \text{erreur de vitesse} \equiv \varepsilon_v(t) \quad \varepsilon \equiv \text{erreur statique de vitesse} \equiv \varepsilon_v$$

Consigne: rampe de pente a $y_c(t) = at \Gamma(t)$ de TL $Y_c(p) = \frac{a}{p^2}$

Ex. : réponse d'un SB du 2nd ordre pseudo-oscillant



$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} pY_c(p) \frac{1}{1+H(p)} \rightarrow \boxed{\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p} \frac{1}{1+H(p)}}$$

• $n = 0$: $\varepsilon_v = \infty$

• $n = 1$: $\varepsilon_v = \frac{a}{K_v}$ avec : $K_v \stackrel{\Delta}{=} H_{10} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{p \rightarrow 0} pH(p)$

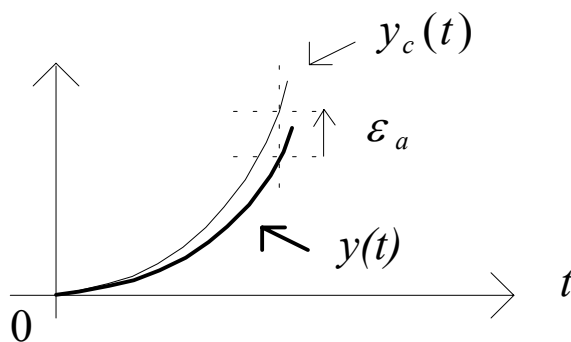
• $n \geq 2$: $\varepsilon_v = 0$

Entrée de consigne en parabole

$\varepsilon(t) \equiv$ erreur d'accélération $\equiv \varepsilon_a(t)$ $\varepsilon \equiv$ erreur statique d'accélération $\equiv \varepsilon_a$

Consigne: parabole (param. b) $y_c(t) = \frac{b}{2} t^2 \Gamma(t)$ de TL $Y_c(p) = \frac{b}{p^3}$

Ex. : réponse d'un SB du 2nd ordre non oscillant




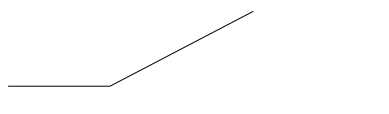

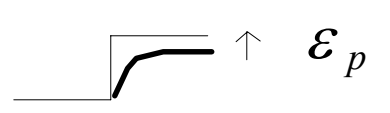
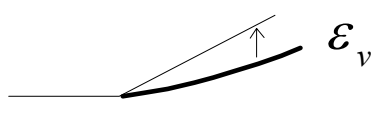
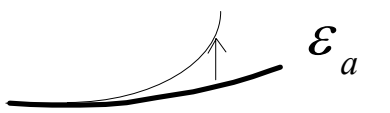
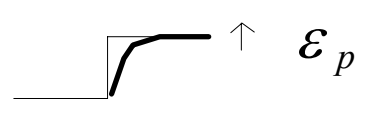


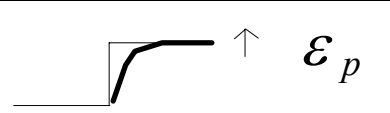
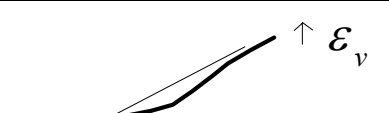
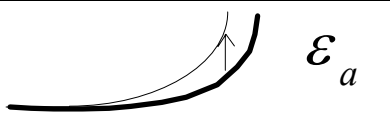
$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p Y_c(p) \frac{1}{1 + H(p)} \rightarrow \boxed{\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{b}{p^2} \frac{1}{1 + H(p)}}$$

• $n \leq 1$: $\varepsilon_a = \infty$

• $n = 2$: $\varepsilon_a = \frac{b}{K_a}$ avec : $K_a \stackrel{\Delta}{=} H_{20} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p^2 H(p)$

• $n \geq 3$: $\varepsilon_a = 0$

Résumé (les erreurs statiques unitaires s'obtiennent pour $\begin{cases} Y_0 = 1 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$)

$y(t)$	 $y_c(t) = Y_0 \Gamma(t)$	 $y_c(t) = at \Gamma(t)$	 $y_c(t) = \frac{b}{2} t^2 \Gamma(t)$
$n = 0$	 $\epsilon_p = Y_0 \frac{1}{1 + K_p}$	 $\epsilon_v = \infty$	 $\epsilon_a = \infty$
$n = 1$	 $\epsilon_p = 0$	 $\epsilon_v = \frac{a}{K_v}$	 $\epsilon_a = \infty$
$n = 2$	 $\epsilon_p = 0$	 $\epsilon_v = 0$	 $\epsilon_a = \frac{b}{K_a}$
	ϵ_p	ϵ_v	ϵ_a

$$K_p \stackrel{\Delta}{=} H_0 = \lim_{p \rightarrow 0} H(p) : \text{Gain statique de la BO}$$

$$K_v \stackrel{\Delta}{=} H_{10} = \lim_{p \rightarrow 0} pH(p)$$

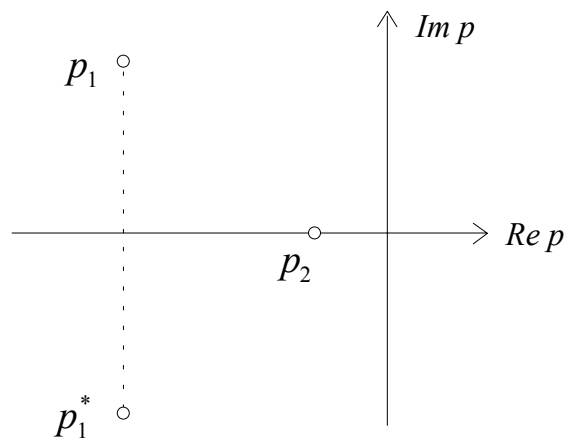
$$K_a \stackrel{\Delta}{=} H_{20} = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 H(p)$$

Rapidité des systèmes

Rapidité et stabilité

Exemple (lieu des pôles) :

*3ème ordre (3 pôles) = sous-système du 1er ordre (pôle P_2)
+ sous-système du 2nd ordre (pôles P_1 et P_1^*)*



Sous-système du 1er ordre gouverné par le pôle P_2 :

moins stable et moins rapide

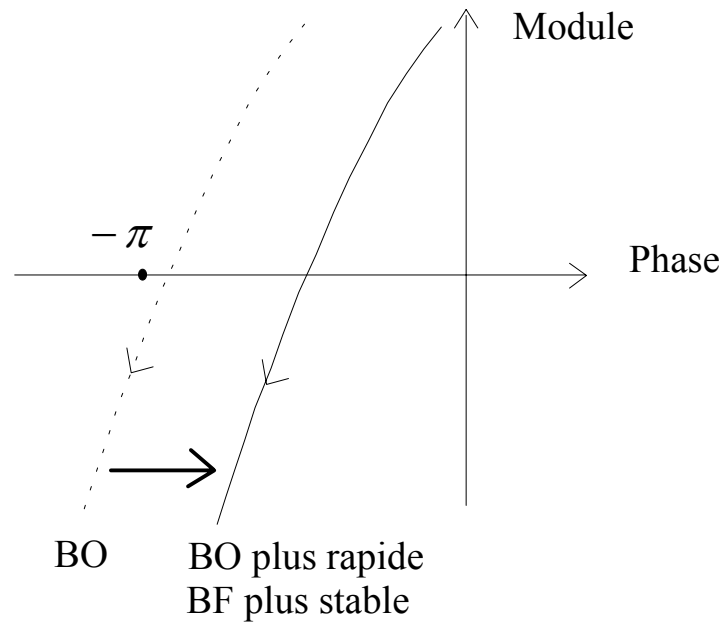
que le sous-système du 2nd ordre régi par les pôles p_1 et p_1^* ,

car P_2 est situé plus près de l'axe imaginaire.

Les pôles dominants (\equiv lents) sont situés le plus près de l'axe imaginaire

Rapidité et stabilité dans le plan de Black

Exemple (lieu de Black) :

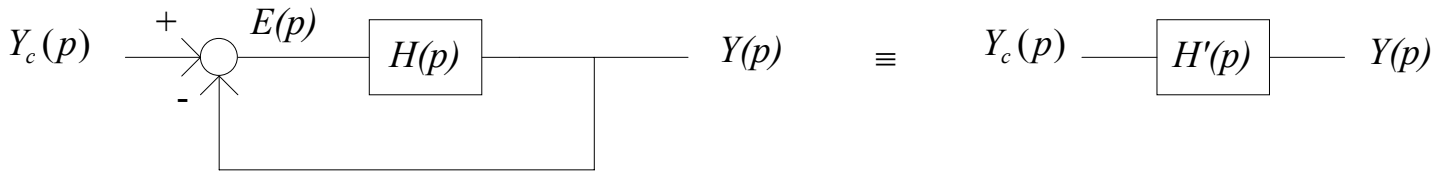


Rapidité \nearrow d'un système en BO \rightarrow avance de temps \rightarrow avance de phase

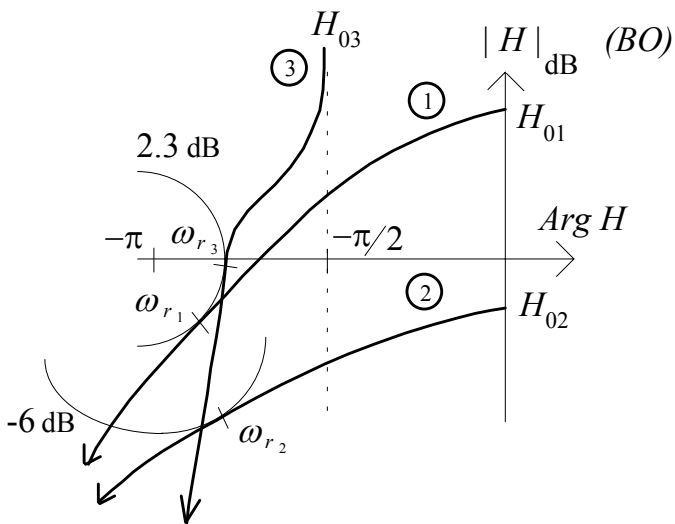
\rightarrow décalage vers la droite du lieu de la BO dans le plan de Black

\rightarrow stabilité à la BF \nearrow

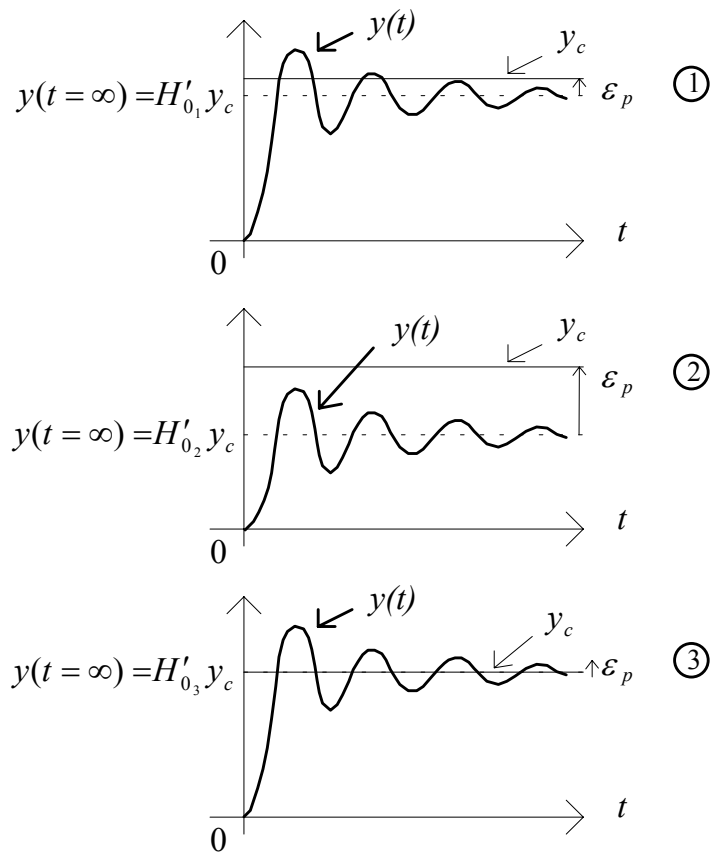
Performances dans le domaine fréquentiel



Fréquence
(Plan de Black de la BO)



Temps
(réponse indicielle de la BF)



- ① $y(t = \infty) = y_c \frac{H_{0_1}}{1 + H_{0_1}} = y_c H'_{0_1}$ \mathcal{E}_p faible (H_{0_1} élevé) $H'_{0_1} = -1 \text{ dB}$ $H'_{1_{\max}} = 2.3 \text{ dB}$
- ② $y(t = \infty) = y_c \frac{H_{0_2}}{1 + H_{0_2}} = y_c H'_{0_2}$ \mathcal{E}_p élevée (H_{0_2} faible) $H'_{0_2} = -8 \text{ dB}$ $H'_{2_{\max}} = -6 \text{ dB}$
- ③ $y(t = \infty) = y_c \frac{H_{0_3}}{1 + H_{0_3}} = y_c H'_{0_3}$ \mathcal{E}_p nulle ($H_{0_3} \infty$) $H'_{0_3} = 0 \text{ dB}$ $H'_{3_{\max}} = 2.3 \text{ dB}$

On déduit le facteur de résonance de la BF assimilée à un 2nd ordre :

$$Q = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}} = \frac{H'_{\max}}{H'_0} = (H'_{\max} - H'_0)_{en\ dB}$$

$$\textcircled{1} : Q_{dB} = 3.3\ dB \quad \rightarrow \quad m = 0.37$$

$$\textcircled{2} : Q_{dB} = 2\ dB \quad \rightarrow \quad m = 0.44$$

$$\textcircled{3} : Q_{dB} = 2.3\ dB \quad \rightarrow \quad m = 0.42$$

($m < 1$: régime pseudo-oscillant)

(résonance si $Q_{dB} > 0\ dB \Leftrightarrow Q > 1$ ($m < 0.7$))

Pulsation de résonance et rapidité

La pulsation de résonance ω_r du SB (\equiv de la BF) est obtenue à la **tangence de la BO au contour de l'abaque de Black de gain**

(du fait que l'abaque de gain croît de façon concentrique au fur et à mesure qu'on s'approche du point critique)

La pulsation de résonance ω_r du SB traduit sa rapidité :

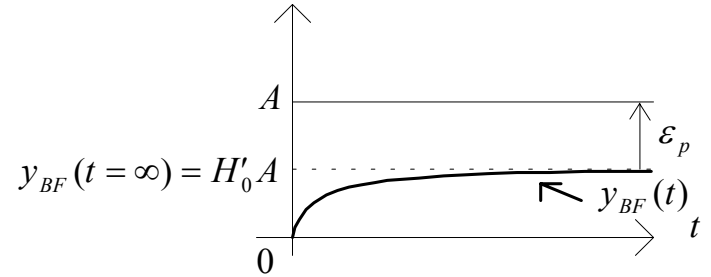
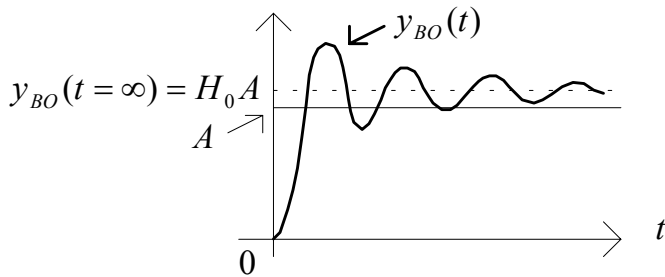
plus un SB est rapide, plus ω_r est élevée.

Rappels sur la réponse en BO et en BF

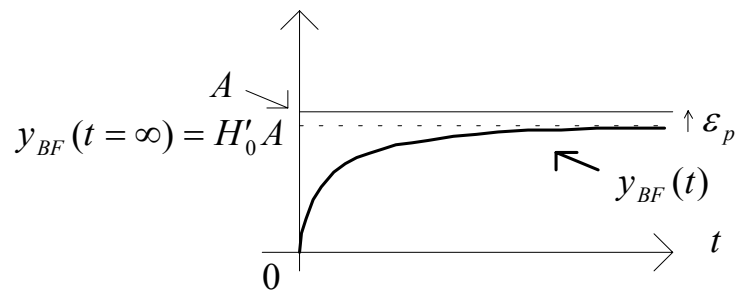
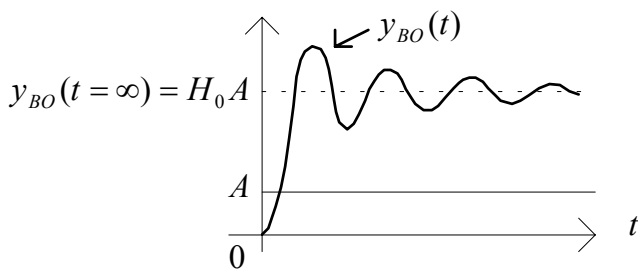
Réponse indicielle de la BO

Réponse indicielle de la BF

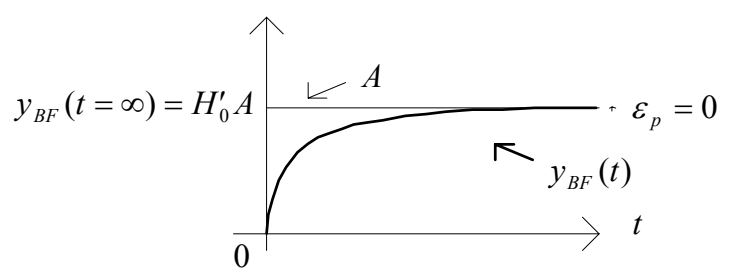
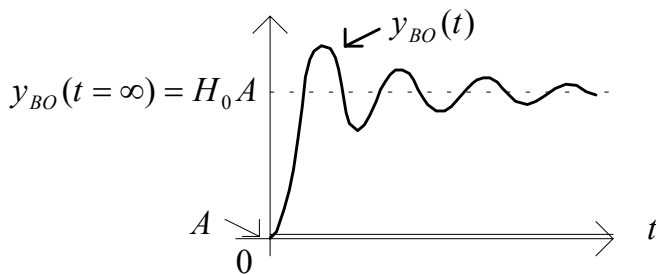
• H_0 faible :



• H_0 élevé :



• H_0 infini (présence d'intégrateur pur sans la BO) :



$$H_0 \nearrow$$

$$\epsilon \searrow$$

$$H'_0 = \frac{H_0}{1 + H_0} \rightarrow 1$$