

### 3. Correction d'un Système Asservi Linéaire (SAL) Correcteur PID - Synthèse des Correcteurs - Synthèse du PID

#### Généralités

Performances d'un SB non maximales toutes ensembles :

Dilemmes. Exemple : Dilemme entre précision et stabilité

Certains processus tolèrent des dépassements, d'autres non

→ *Correction* de la commande à effectuer

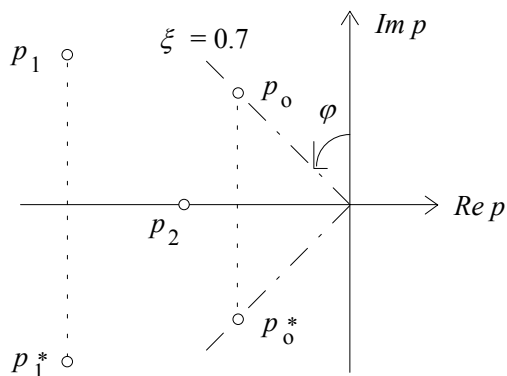
#### Les critères d'une bonne régulation

##### Le second ordre dominant

Modèle du 2nd ordre fondamental :

$$H(p) = \frac{H_0}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}$$

*Exemple : Processus du 5ème ordre (5 pôles) :*



Pôles  $p_0$  et  $p_0^*$  : sous-réponse pseudo-oscillante (dominante)  $\xi = 0.7$

Pôle  $p_2$  : sous-réponse apériodique

Pôles  $p_1$  et  $p_1^*$  : sous-réponse pseudo-oscillante

Pôles  $p_0$  et  $p_0^*$  dominants

Amortissement:  $\sin \varphi = \xi$

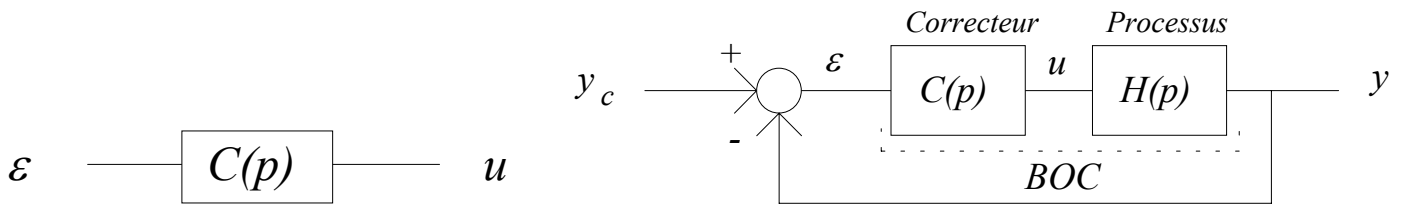
Pôle  $p_i^*$  : complexe conjugué de  $p_i$

*Ce système du 5ème ordre peut être approché par un 2nd ordre dont les pôles sont les pôles dominants du processus du 5ème ordre, soit  $p_0$  et  $p_0^*$*

**Le lieu des pôles du système traduit sa stabilité et sa rapidité :**

- .  $|\text{Re}(p_i)|$  grande et  $\text{Re}(p_i) < 0 \rightarrow$  meilleures sont la stabilité et la rapidité
- .  $|\text{Re}(p_i)|$  faible et  $\text{Re}(p_i) < 0 \rightarrow$  système lent et peu stable (pôles dominants)

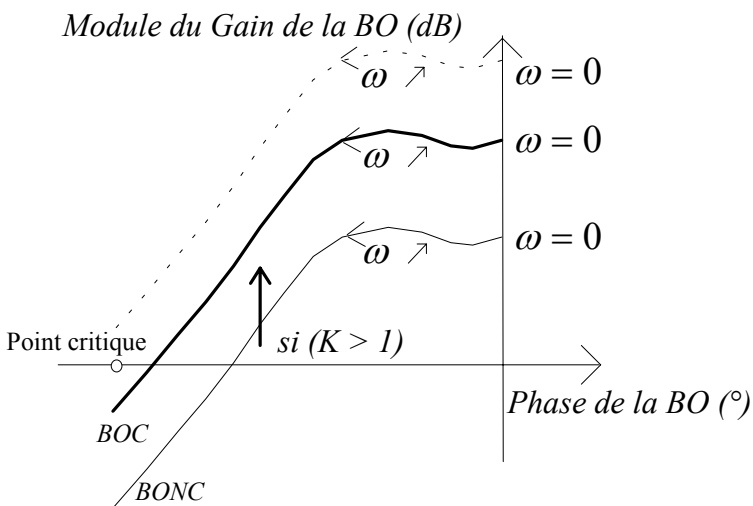
**Structure des différents correcteurs. Correcteurs standards. Réglages**



**Le correcteur proportionnel K**

$$C(p) = K$$

↗ précision du SB mais ↘ stabilité.    ↗ stabilité du SB mais ↘ précision



$$[C(p)H(p)] = K H(p)$$

$$[C(p)H(p)]_{dB} = K_{dB} + H(p)_{dB}$$

$$[C(p)H(p)]_{dB} = 20 \log(K) + 20 \log [H(p)]$$

Réglage de K ← précision statique voule :  $Ex$  : position :  $\varepsilon_p = \frac{Y_0}{1 + KH_0}$

Loi de commande :  $u(t) = K\varepsilon(t)$

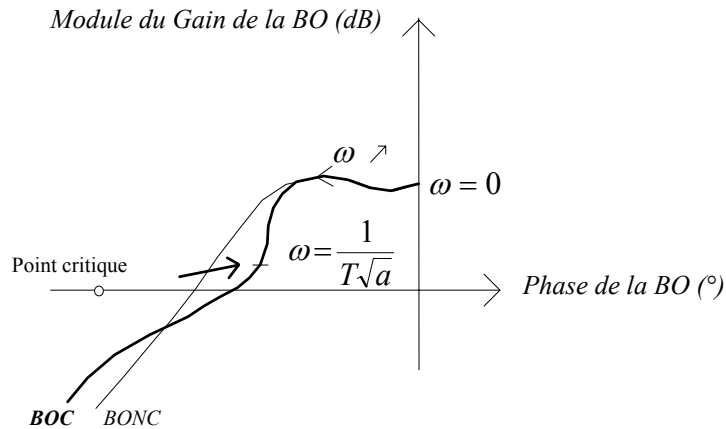
FT :

$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K$$

**Le correcteur à avance de phase**  $K \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$  ( $a > 1$ )

↗ stabilité et ↗ rapidité du SB

Avance de phase maximum pour  $\omega T = \frac{1}{\sqrt{a}}$

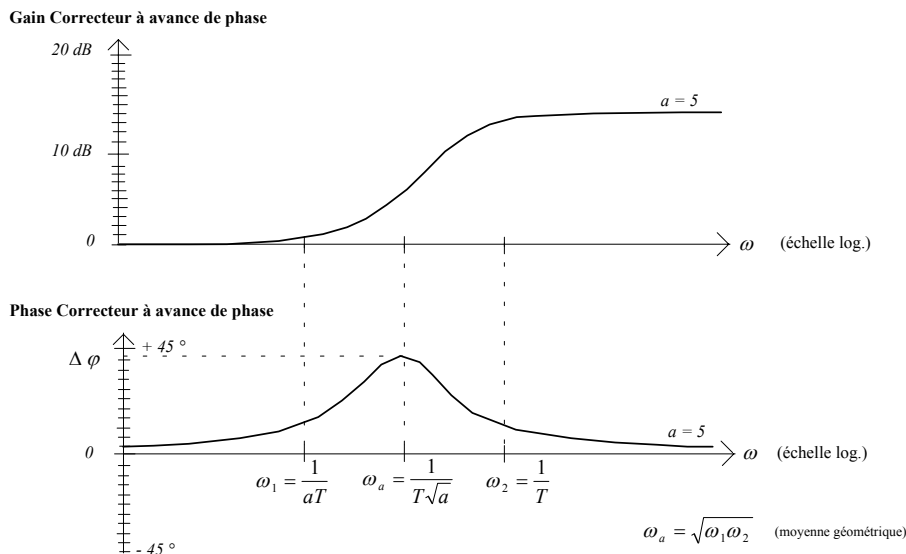


**Réglage :** On choisit d'abord  $a$  (fixé par l'avance de phase maximum requise)

puis  $T$  pour que  $\omega$  affectée par cette avance vérifie :  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

**Loi de commande :**  $u(t) = K[\varepsilon(t) + aT\dot{\varepsilon}(t)] - T\dot{u}(t)$

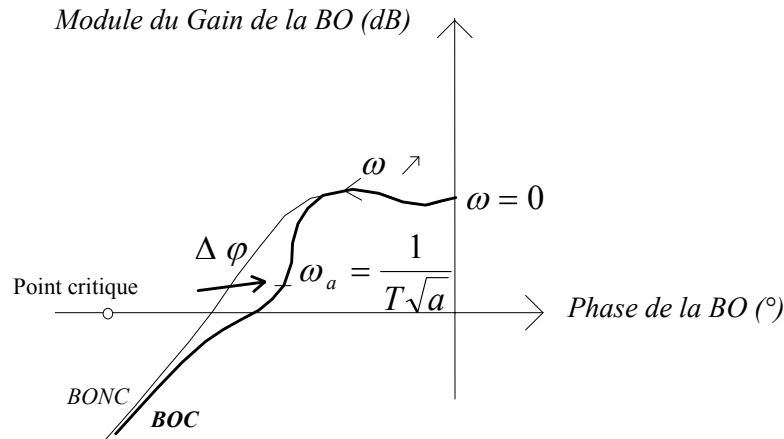
**FT :**  $C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$



**Réponse en fréquence du correcteur à avance de phase ( $K = 1$ )**

## « Algorithme » de réglage

L'avance de phase maxi  $\Delta \varphi = \text{Arc sin} \frac{a-1}{a+1}$  se produit à  $\omega = \omega_a = \frac{1}{T\sqrt{a}}$



1. On détermine l'avance de phase nécessaire

→ ceci impose  $\Delta \varphi = \text{Arc sin} \frac{a-1}{a+1}$  → ceci détermine  $a$

2. On choisit  $T$  pour que la zone de fréquences concernée par l'avance de phase maxi se situe autour du point critique

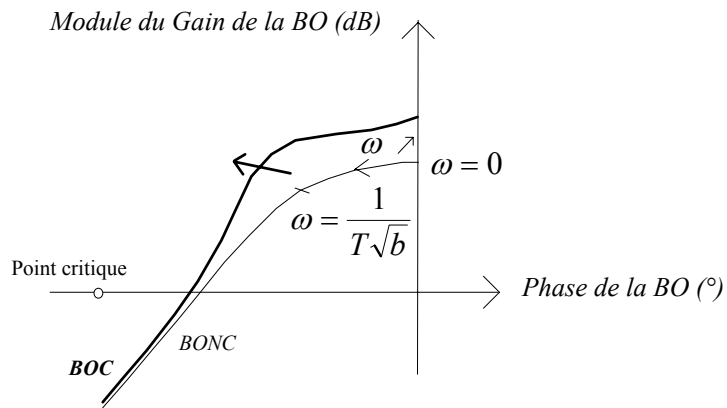
→ On a alors  $\omega_a = \frac{1}{T\sqrt{a}}$  → On en déduit  $T$

3. On trace la BO Corrigée (BOC) avec  $K = 1$  (0 dB) dans le plan de Black puis on règle  $K$  tel que la BOC tangente le contour de l'abaque de gain désiré, décrit par l'amortissement  $m$  voulu pour la BF et obtenu par le facteur de résonance  $Q$

**Le correcteur à retard de phase**  $K \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$  ( $b > 1$ )

↗ précision du SB

Retard de phase maximum pour  $\omega T = \frac{1}{\sqrt{b}}$

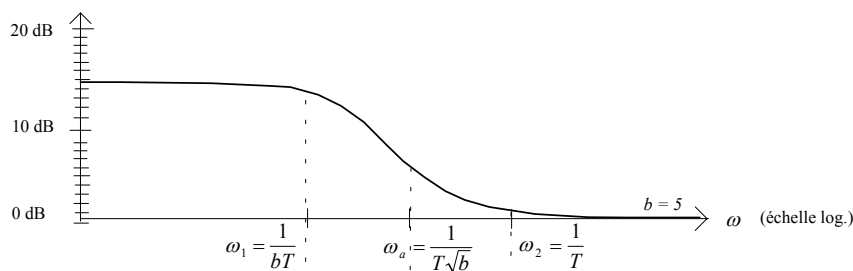


Réglage :  $K = b$ , pour ne pas affecter les fréquences de la BO  $\omega > \frac{10}{T}$

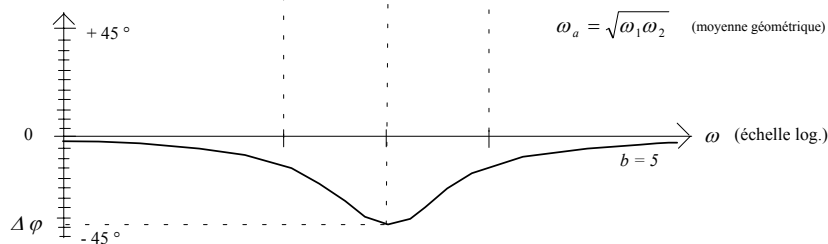
Loi de commande :  $u(t) = K[\varepsilon(t) + T\dot{\varepsilon}(t)] - bT\dot{u}(t)$

FT :  $C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$

Gain Correcteur à retard de phase



Phase Correcteur à retard de phase

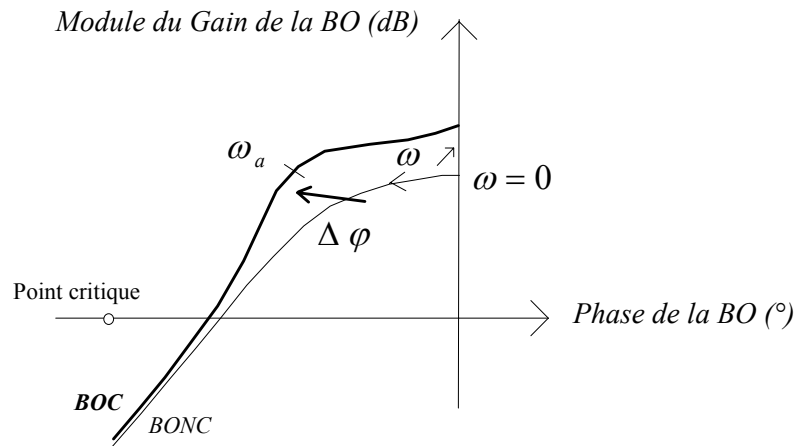


Réponse en fréquence du correcteur à retard de phase ( $K = b > 0$ )

## « Algorithme » de réglage

Le retard de phase maxi  $\Delta \varphi$  se produit à  $\omega = \omega_a = \frac{1}{T\sqrt{b}}$

Retard de phase nul pour  $\omega > \omega_b = \frac{10}{T\sqrt{b}}$  ( $\omega_b$  choisi égal à  $10\omega_a$ )



1. On détermine d'abord  $b$  :

Soit  $H_0$  le gain statique de la BONC.

Soit  $K H_0$  le gain statique de la BOC

(gain statique désiré correspondant à une précision statique requise)

$$\text{On a } 20 \log b = |K H_0|_{dB} - |H_0|_{dB} = 20 \log \frac{K H_0}{H_0} = 20 \log K \rightarrow b = K$$

Le gain  $K$  du correcteur est choisi égal à  $b$  afin que les fréquences  $> \omega_b = \frac{10}{T\sqrt{b}}$  ne soient pas affectées.

2. On détermine  $T$  tel que à  $\omega_b = \frac{10}{T\sqrt{b}}$  ne se produise plus de retard de phase

## Le correcteur P.I.D

↗ précision, rapidité et stabilité du SB

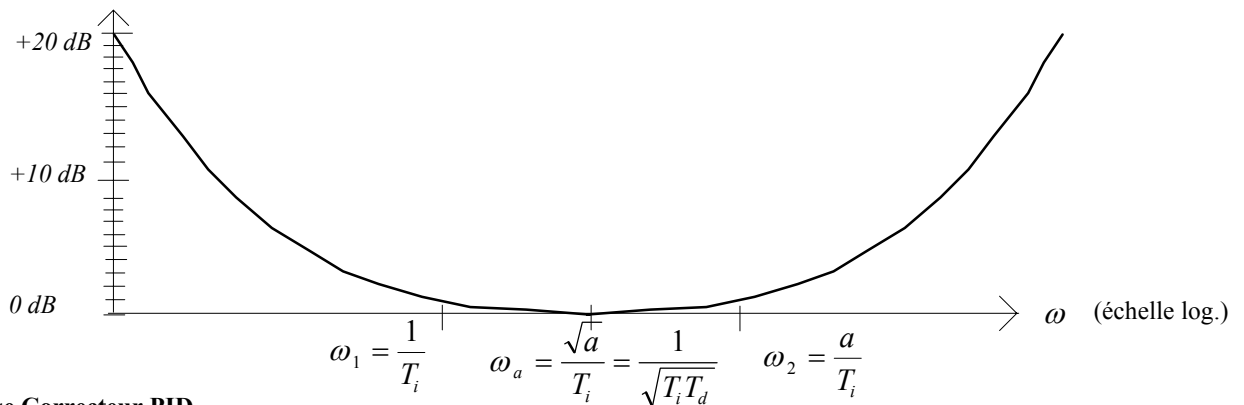
Loi de commande : 
$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_i \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + K_d \dot{\varepsilon}(t)$$

ou encore : 
$$u(t) = K \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \dot{\varepsilon}(t) \right]$$

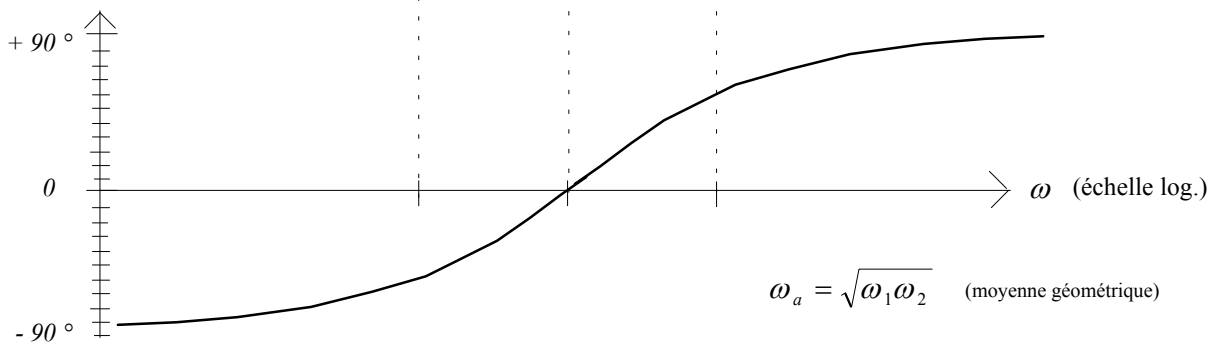
FT : 
$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p}$$

Réponse fréquentielle du correcteur P.I.D.

Gain Correcteur PID



Phase Correcteur PID



Réponse en fréquence du P.I.D. ( $K = 1$ )

## « Algorithme » de réglage

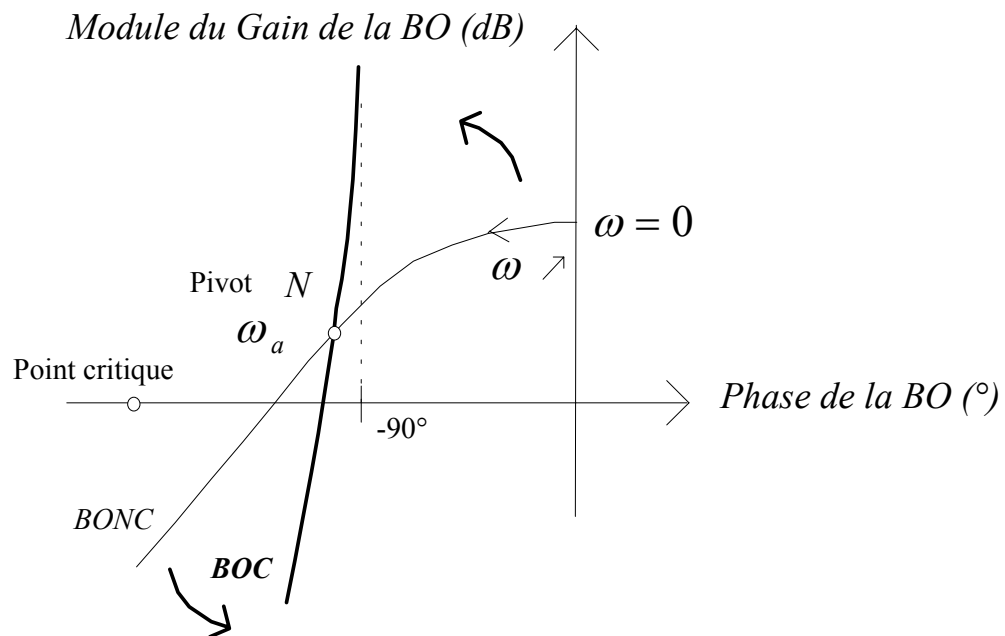
On pose :  $a = \frac{T_i}{T_d}$

- Aux pulsations  $\omega < \frac{\sqrt{a}}{T_i}$  : le gain est accru - il y a retard de phase
- Aux pulsations  $\omega > \frac{\sqrt{a}}{T_i}$  : le gain est réduit - il y a avance de phase
- A la pulsation  $\omega = \frac{\sqrt{a}}{T_i}$  : invariance du gain et de la phase :

Pulsation de **pivot** :  $\omega_a = \frac{\sqrt{a}}{T_i} = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}}$

Il y a rotation du lieu de la BO rapport au pivot lors de la correction

Le correcteur PID de gain  $K = 1$  possède un point neutre  $N$  qui va servir de pivot, pour lequel : **gain, phase de la BONC  $\equiv$  gain, phase de la BOC**



1. On choisit la pulsation  $\omega_a$ , pulsation du pivot.

On fixe provisoirement le gain  $K$  à 1.

2. On fixe  $T_d$  : on a ainsi un seul paramètre de réglage :

$\alpha = 4$  assure en général un degré de liberté suffisant de réglage (valeur usuelle)

On prend  $T_d = \frac{T_i}{4}$  (valeur typique, quitte à ajuster après)

$$\rightarrow \omega_a = \frac{\sqrt{\alpha}}{T_i} = \frac{2}{T_i} \quad \rightarrow \quad T_i = \frac{2}{\omega_a}$$

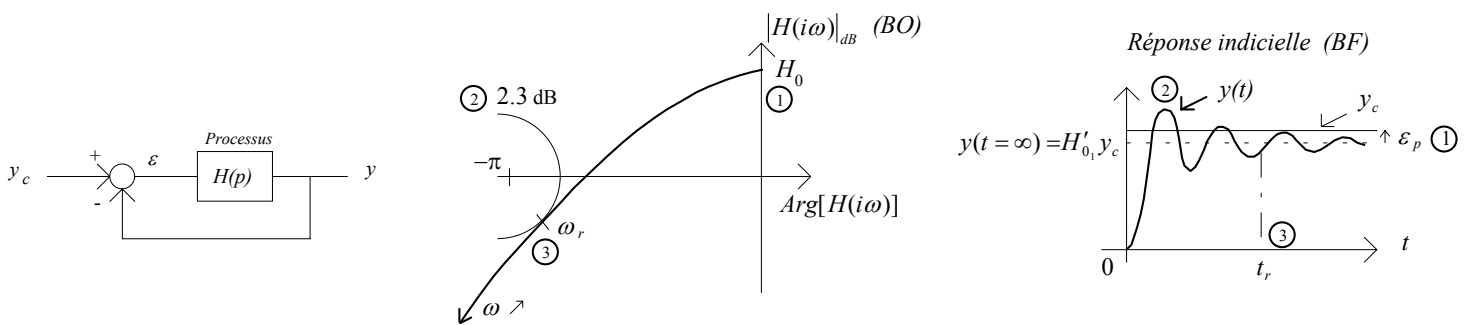
3. On ajuste, après basculement, le gain  $K$  pour que la BO corrigée ( $BOC$ ) tangente le contour de l'abaque de Black de gain désiré, décrit par l'amortissement  $m$  voulu pour la BF et obtenu par le facteur de résonance  $Q$ .

(La  $BOC$  avec  $K = 1$  (0 dB) a été au préalable tracée dans le plan de Black)

## Synthèse des correcteurs

*Synthèse dans le domaine fréquentiel - Modèle du 2nd ordre fondamental*

On approche le SB par un 2nd ordre fondamental



: paramètre de gain statique

: paramètre  $Q_{dB} \rightarrow m \rightarrow$  Dépassement

:  $\omega_r \rightarrow \omega_0 \rightarrow t_r$