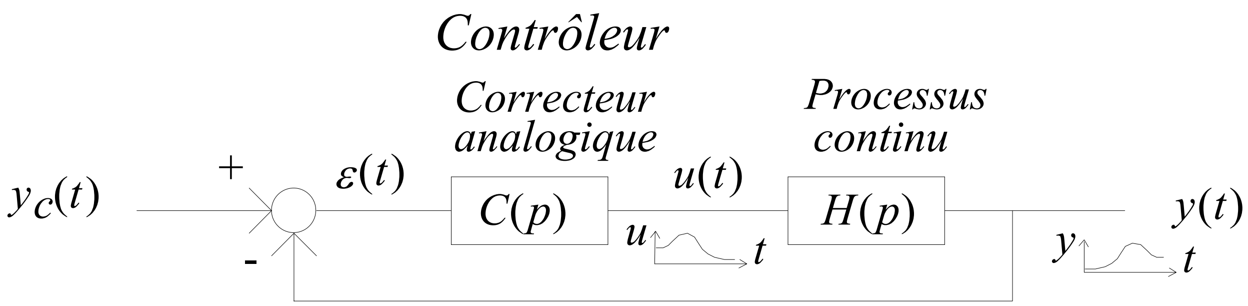
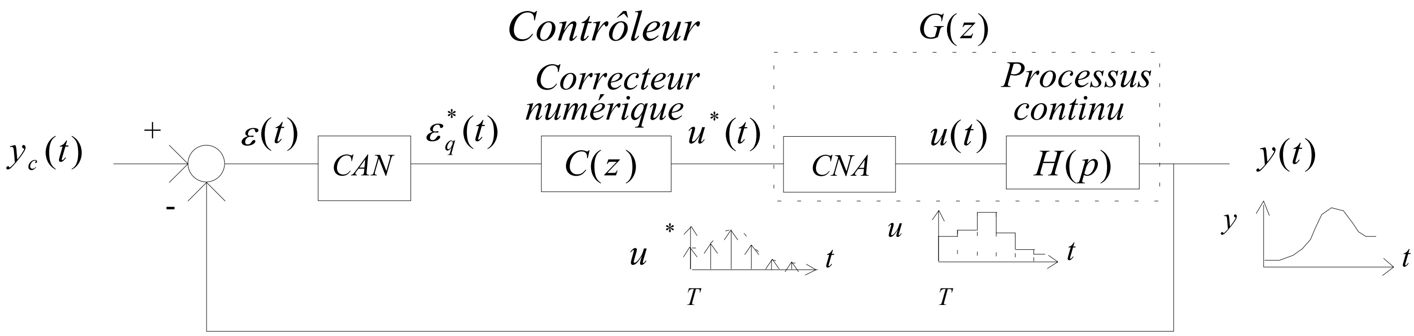
4. SALs échantillonnés

0. Rappels

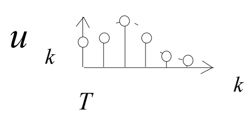
Asservissement analogique d'un processus analogique



Asservissement numérique d'un processus analogique *(T : période d'éch.)*



$$u^*(t) \equiv u(kT) = u_k$$

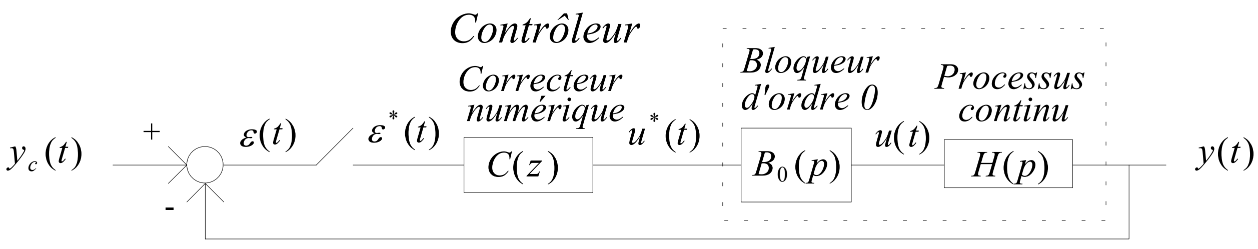


$$\varepsilon_q^*(t) \equiv \varepsilon_q(kT)$$

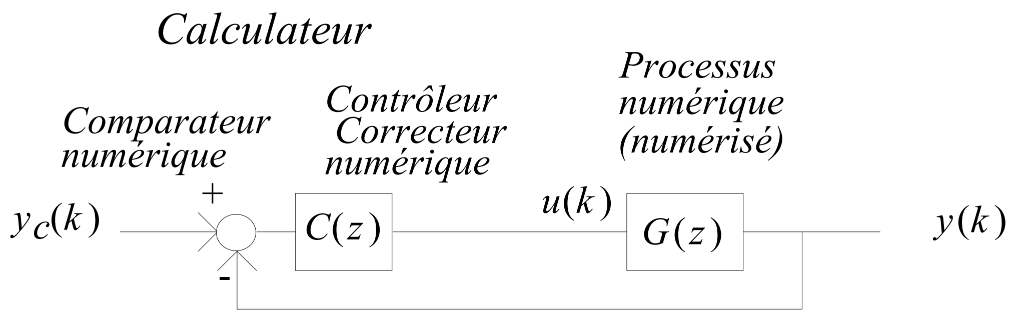
(TC) *(TD)*

$$G(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\left[\frac{H(p)}{p}\right]$$

Asservissement échantillonné d'un processus analogique *(T : période d'éch.)*



$\equiv$

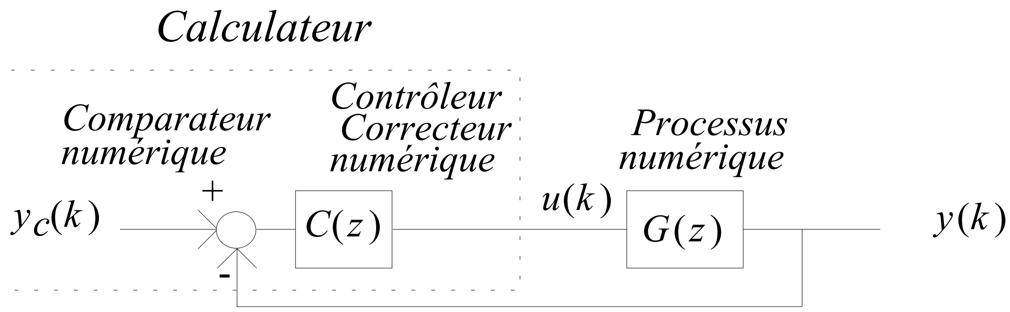


avec :

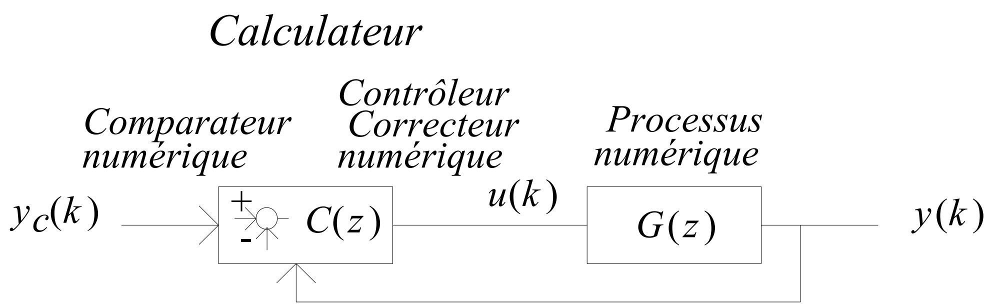
$$G(z) = Z[B_0(p)H(p)] = Z\left[\left(\frac{1-e^{-pT}}{p}\right)H(p)\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{H(p)}{p}\right]$$

$$\boxed{G(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{H(p)}{p}\right]}$$

Asservissement numérique d'un processus numérique



$\equiv$



1. Rappels sur l'échantillonnage

TD : $\underset{(TC)}{x(t)} \; \underset{t=nT}{\text{—/—}} \; \underset{(TD)}{x(nT)}$ **TC :** $\underset{(TC)}{x(t)} \; \text{—/—} \; \underset{(TC)}{x^*(t)}$

$$x^*(t) = \sum_n x(t)\delta(t-nT) = \sum_n x(nT)\delta(t-nT) = x(t)\sum_n \delta(t-nT) = x(t).|\_|\_|_T(t)$$

|_|_|$_T$ *(t)* peigne de Dirac à TC : $|\_|\_|_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

$$\boxed{X^*(p) = TL\left[x^*(t)\right] = TL^*\left[x(nT)\right] = TZ\left[x(nT)\right] = X(z)}$$

TEMPS	LAPLACE	Z
$\left[x(t)+y(t)\right]^* = x^*(t)+y^*(t)$	$\left[X(p)+Y(p)\right]^* = X^*(p)+Y^*(p)$	$Z\left[X(p)+Y(p)\right] = X(z)+Y(z)$
$\left[x^*(t)\right]^* = x^*(t)$	$\left[X^*(p)\right]^* = X^*(p)$	$Z\left[X(z)\right] = X(z)$
$\left[x^*(t)*y(t)\right]^* = x^*(t)*y^*(t)$	$\left[X^*(p)\cdot Y(p)\right]^* = X^*(p)\cdot Y^*(p)$	$Z\left[X(z)\cdot Y(p)\right] = X(z)\cdot Y(z)$
$\left[x(t)*y^*(t)\right]^* = x^*(t)*y^*(t)$	$\left[X(p)\cdot Y^*(p)\right]^* = X^*(p)\cdot Y^*(p)$	$Z\left[X(p)\cdot Y(z)\right] = X(z)\cdot Y(z)$
$\left[x(t)*y(t)\right]^* \neq x^*(t)*y^*(t)$	$\left[X(p)\cdot Y(p)\right]^* \neq X^*(p)\cdot Y^*(p)$ $\left[X(p)\cdot Y(p)\right]^*$ noté $\overline{XY}^*(p)$	$Z\left[X(p)\cdot Y(p)\right] \neq X(z)\cdot Y(z)$ $Z\left[X(p)\cdot Y(p)\right]$ noté $\overline{XY}(z)$

2. Asservissements échantillonnés (relations fondamentales)

2.1. Entrées/Sorties numériques et analogiques

$H(p)$ processus analogique

Entrée analogique - sortie analogique

$$\begin{tikzcd}
e(t) \arrow[r, dash] \arrow[d, "TL"'] & \boxed{H(p)} \arrow[r, dash] & s(t) \\
E(p) \arrow[rr] & & S(p) = H(p)E(p) \arrow[u, "TL^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Entrée numérique ($\rightarrow$ échantillonnée) - sortie numérique ($\rightarrow$ échantillonnée)

$H(z)$ processus numérique :

$$\begin{tikzcd}
e(t) \arrow[r, dashed, "/"] & e^*(t) \; e(nT) \arrow[r, dash] \arrow[d, "TL"', "TZ"] & \boxed{H(z)} \arrow[r, dash] & s(nT) \; s^*(t) \\
& E(z) \arrow[rr] & & S(z) = H(z)E(z) \arrow[u, "TZ^{-1}", "TL^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$H(p)$ processus analogique:

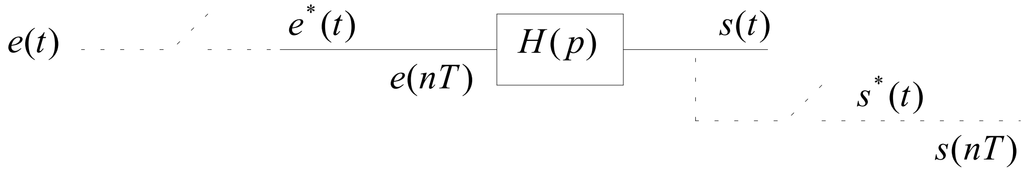
$$\begin{tikzcd}
e(t) \arrow[r, dashed, "/"] & e^*(t) \; e(nT) \arrow[r, dash] & \boxed{H(p)} \arrow[r, dash, "s(t)"] & \arrow[r, "/"] & s^*(t) \; s(nT)
\end{tikzcd}$$

$$S(p) = H(p)E^*(p) \quad \xrightarrow{/} \quad S^*(p) = [H(p)E^*(p)]^* = H^*(p)E^*(p)$$

$$\rightarrow S(z) = H(z)E(z)$$

Entrée numérique (→ échantillonnée) - sortie analogique

$H(p)$ *processus analogique*



$$s(t) = TL^{-1}[S(p)] = TL^{-1}[H(p)E^*(p)]$$

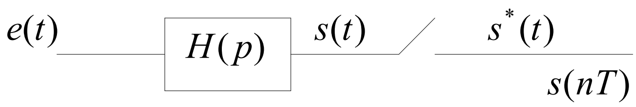
$$s^*(t) \xrightarrow{TL} S^*(p) = S(z) = [H(p)E^*(p)]^* = H^*(p)E^*(p) = H(z)E(z)$$

$$S(p) = H(p)E^*(p) \;\; \diagup\!\!\!\rightarrow \;\; S^*(p) = H^*(p)E^*(p) \quad \leftrightarrow \quad S(z) = H(z)E(z)$$

avec : $\quad H(z) = H^*(p) = Z[H(p)]$

Entrée analogique - sortie numérique (→ échantillonnée)

$H(p)$ *processus analogique*



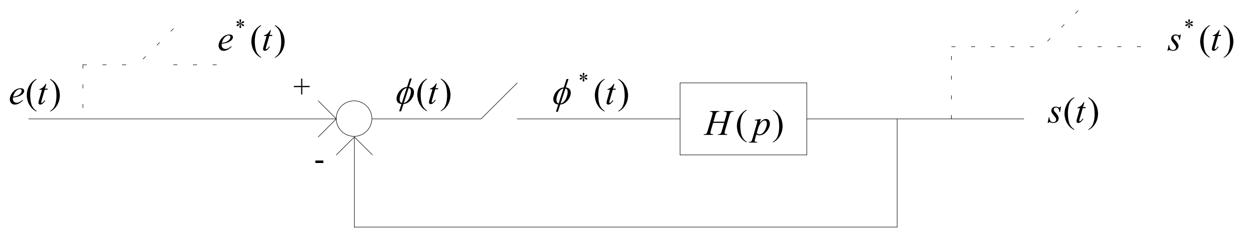
$$S(p) = H(p)E(p) \;\; \diagup\!\!\!\rightarrow \;\; S^*(p) = \overline{HE}^*(p) \quad \leftrightarrow \quad S(z) = \overline{EH}(z)$$

avec $\quad \overline{EH}(z) = Z[\overline{EH}(p)]$

Attention : $\overline{EH}^*(p) \neq E^*(p) \cdot H^*(p)$.

2.2. Asservissements échantillonnés

Retour unitaire - Consigne analogique - sortie analogique



$$S(p) = H(p)\Phi^*(p) \rightarrow S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p) \quad \leftrightarrow \quad S(z) = H(z)\Phi(z)$$

car $\left[\Phi^*(p)\right]^* = \Phi^*(p)$ $$H(z) = Z[H(p)]$$

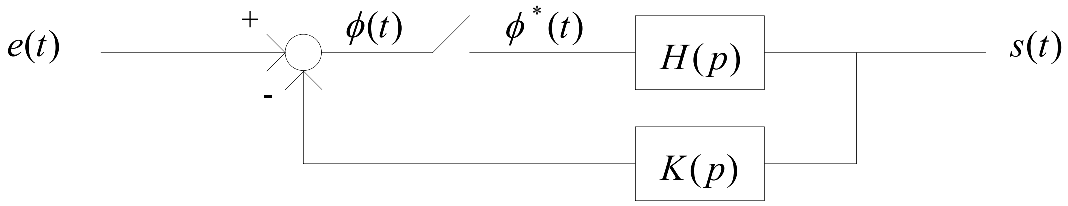
$$\Phi(p) = E(p) - S(p) \quad \rightarrow \quad \Phi^*(p) = E^*(p) - S^*(p)$$

$$\rightarrow \quad \Phi^*(p) = E^*(p) - H^*(p)\Phi^*(p) \quad \rightarrow \quad \Phi(z) = E(z) - H(z)\Phi(z)$$

$$\rightarrow \quad \Phi(z) = \frac{E(z)}{1 + H(z)}$$

$$S(z) = H(z)\Phi(z) = H(z)\frac{E(z)}{1 + H(z)} \quad \rightarrow \quad FTBF: \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)}}$$

Retour non unitaire avec blocs de la BO couplés - Consigne analogique - sortie analogique



$$\Phi(p) = E(p) - K(p)\,S(p) \;\rightarrow\; \Phi^*(p) = E^*(p) - \overline{K(p)S(p)}^{\,*}$$

or : $$S(p) = H(p)\,\Phi^*(p)$$

$$\rightarrow \quad \Phi^*(p) = E^*(p) - \overline{K(p)H(p)\Phi^*(p)}^{\,*} = E^*(p) - \overline{KH}^{\,*}(p)\,\Phi^*(p)$$

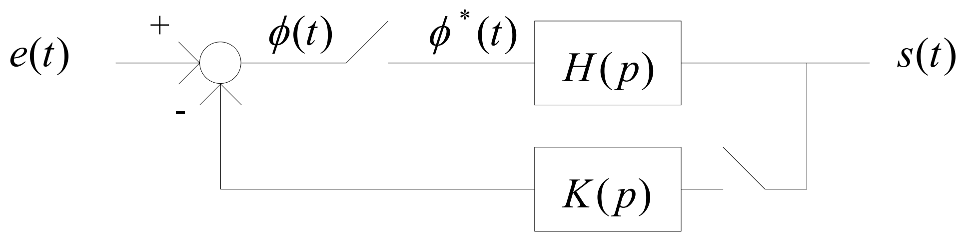
$$\rightarrow \quad \Phi^*(p) = \frac{E^*(p)}{1 + \overline{KH}^{\,*}(p)}$$

$$S(p) = H(p)\,\Phi^*(p) \;\rightarrow\; S^*(p) = H^*(p)\,\Phi^*(p) = H^*(p)\frac{E^*(p)}{1 + \overline{KH}^{\,*}(p)}$$

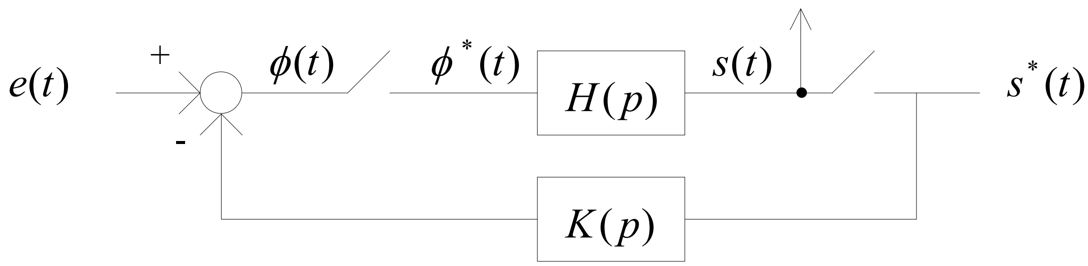
$$\leftrightarrow \quad S(z) = H(z)\frac{E(z)}{1 + \overline{KH}(z)} \qquad FTBF : \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + \overline{KH}(z)}}$$

avec : $$\overline{KH}(z) = Z[\overline{KH}(p)]$$

Retour non unitaire avec blocs de la BO découplés - Consigne analogique - sortie analogique



$\equiv$



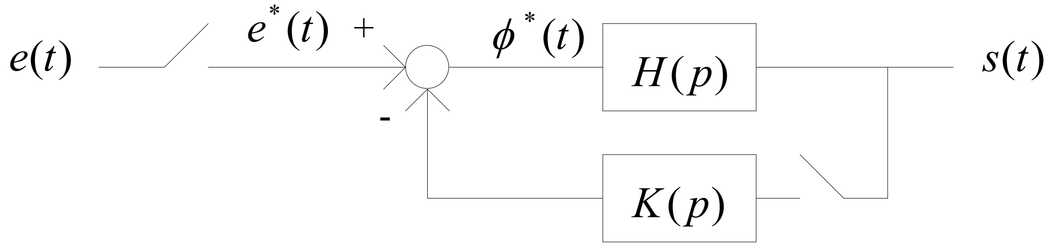
$$\Phi(p) = E(p) - K(p)S^*(p) \quad \rightarrow \quad \Phi^*(p) = E^*(p) - K^*(p)S^*(p)$$

or $\quad S(p) = H(p)\Phi^*(p) \quad \rightarrow \quad S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p)$

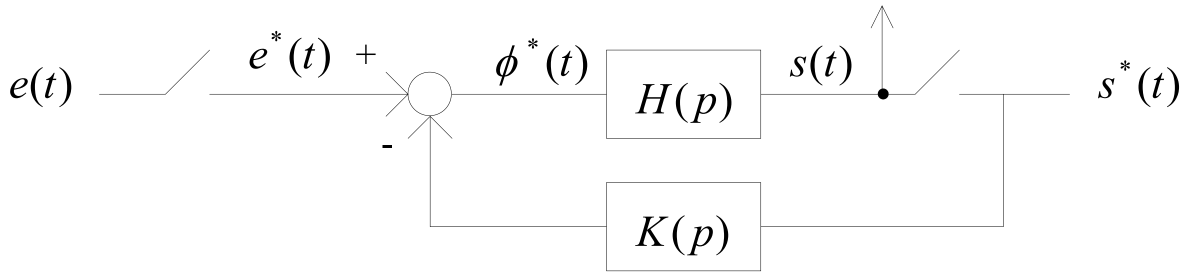
$$\rightarrow \; S^*(p) = H^*(p)\left[E^*(p) - K^*(p)S^*(p)\right] \rightarrow \; S(z) = H(z)\left[E(z) - K(z)S(z)\right]$$

$FTBF:$ $\boxed{\dfrac{S(z)}{E(z)} = \dfrac{H(z)}{1 + K(z)H(z)}}$ avec : $H(z) = Z[H(p)]$ et $K(z) = Z[K(p)]$

Retour non unitaire avec blocs de la BO découplés - Consigne échantillonnée - sortie analogique



$\equiv$



$$\Phi^*(p) = E^*(p) - K(z)\,S^*(p) \quad \to \quad \Phi(z) = E(z) - K(z)\,S(z)$$

$$S^*(p) = H^*(p)\,\Phi^*(p) \quad \to \quad S(z) = H(z)\,\Phi(z) = H(z)\big[E(z) - K(z)\,S(z)\big]$$

$FTBF:$ $\boxed{\dfrac{S(z)}{E(z)} = \dfrac{H(z)}{1 + K(z)H(z)}}$ avec : $H(z) = Z[H(p)]$ et $K(z) = Z[K(p)]$

ANNEXE 1

Tables des principales Transformées en z
Correspondance avec les Transformées de Laplace

TABLE DES TRANSFORMEES EN Z ET DE LAPLACE (FONCTIONS CAUSALES)

	X(s) $\xleftarrow{TL}$	***x(t)***	***x(kT)*** ou ***x(k)***	$\xrightarrow{TZ}$ ***X(z)*** $\xleftarrow{Z}$ **X(s)**
1	1	$\delta(t)$	delta Kronecker: $\delta(kT)=1$ si $k=0$, 0 sinon	1
2	$e^{-\tau s}$	*Retard:* $\delta(t-\tau)$	$\delta[(k-m)T] = 1$ si $k = m$, 0 sinon	z^{-m}
3	$\frac{1}{s}$	*Echelon* $\Gamma(t)$ noté aussi $1(t)$	$\Gamma(kT)$ noté aussi $1(kT)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
6	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
7	$\frac{6}{s^4}$	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
8	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
9	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
10	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
11	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
12	$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$(kT)^2\,e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{\left[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}\right]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\sin\omega kT$	$\frac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
15	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\cos\omega kT$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
16	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$e^{-akT}\sin\omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
17	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$e^{-akT}\cos\omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
18	...	...	$a^k\cos k\pi=(-1)^k a^k$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$
19	...	...	a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$

	$X(s) \xleftarrow{TL}$	$x(t)$	$x(kT)$ ou $x(k)$	$\xrightarrow{TZ}$ $X(z)$ $\xleftarrow{Z}$ X(s)
20	...	...	$a^{k-1} \quad k=1,2,3\ldots$	$\dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
21	...	...	ka^{k-1}	$\dfrac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
22	...	...	k^2a^{k-1}	$\dfrac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
23	...	...	k^3a^{k-1}	$\dfrac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
24	...	...	k^4a^{k-1}	$\dfrac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
25	$\dfrac{1}{s(1+\tau s)^2}$	$1-\left(1+\dfrac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{T}}$	$1-(1+\dfrac{kT}{\tau})e^{-\frac{kT}{\tau}}$	$\dfrac{ze^{-T/\tau}\left[z\left(-1+e^{T/\tau}-\dfrac{T}{\tau}\right)-1+e^{-T/\tau}+\dfrac{T}{\tau}\right]}{(z-1)(z-e^{-T/\tau})^2}$
26	$\dfrac{1}{1+\dfrac{2m}{\omega_0}s+\dfrac{s^2}{\omega_0^2}}$ Cas $0<m<1$	$\dfrac{\omega_0}{D}e^{-m\omega_0 t}\sin\omega_0' t$ avec : $D=\sqrt{1-m^2}$ $\omega_0'=\omega_0\sqrt{1-m^2}$	...	$\dfrac{\omega_0}{D}\dfrac{ze^{-m\omega_0 T}\sin(\omega_0' T)}{z^2-2ze^{-m\omega_0 T}\cos(\omega_0' T)+e^{-2m\omega_0 T}}$
27	$\dfrac{1}{s\left(1+\dfrac{2m}{\omega_0}s+\dfrac{s^2}{\omega_0^2}\right)}$ Cas $0<m<1$	$1-\dfrac{1}{D}E\sin\left(\omega_0' t+\psi\right)$ avec : $D=\sqrt{1-m^2}$ $E=e^{-m\omega_0 t}$ $\omega_0'=\omega_0\sqrt{1-m^2}$ $\psi=Arc\cos m$	...	$\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{1}{D}\cdot\dfrac{Dz^2+e^{-m\omega_0 T}\sin(\omega_0' T-\psi)z}{z^2-2ze^{-m\omega_0 T}\cos(\omega_0' T)+e^{-2m\omega_0 T}}$

ANNEXE 2

Tables des correspondances en z et Laplace par synthèse par Invariance Indicielle

TABLE DES CORRESPONDANCES EN Z ET LAPLACE PAR SYNTHESE PAR INVARIANCE INDICIELLE (FONCTIONS CAUSALES)

	$X_A(s)$	$X_N(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{X_A(s)}{s}\right]$
1	$\frac{1}{\tau\, s}$	$\frac{T}{\tau}\cdot\frac{1}{z-1}$
2	$\frac{1}{(\tau\, s)^2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{T}{\tau}\right)^2\cdot\frac{z+1}{(z-1)^2}$
3	$k\frac{1}{1+\tau\, s}$	$k\frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{z-e^{-\frac{T}{\tau}}}$
4	$\frac{1}{\tau'\, s(1+\tau\, s)}$	$\frac{\frac{T}{\tau'}\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)-\frac{\tau}{\tau'}(z-1)\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{(z-1)\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}=\frac{T-\tau\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\tau'}\cdot\frac{\left[z-\frac{e^{-\frac{T}{\tau}}\left(\frac{T}{\tau}\right)-\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{\left(\frac{T}{\tau}\right)-\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}\right]}{(z-1)\left(z-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$
5	$\frac{1}{(1+\tau\, s)(1+\tau'\, s)}$	$1+\frac{\tau\,\tau'}{\tau-\tau'}\left(-\frac{1}{\tau'}\frac{z-1}{z-e^{-\frac{T}{\tau}}}+\frac{1}{\tau}\frac{z-1}{z-e^{-\frac{T}{\tau'}}}\right)$
6	$\frac{1}{1+2m\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$ avec : $\omega_0'=\omega_0\sqrt{1-m^2}$ Cas $0<m<1$	1ère forme : $\frac{b_1 z+b_0}{z^2+a_1 z+a_0}$ avec : $a_0=e^{-2m\omega_0 T}$ $a_1=-2\sqrt{a_0}\cos\left(\omega_0' T\right)$ $b_0=a_0+\sqrt{a_0}\left[m\frac{\omega_0}{\omega_0'}\sin\left(\omega_0' T\right)-\cos\left(\omega_0' T\right)\right]$ $b_1=1-\sqrt{a_0}\left[m\frac{\omega_0}{\omega_0'}\sin\left(\omega_0' T\right)+\cos\left(\omega_0' T\right)\right]$ 2nde forme : $\frac{b_1 z+b_0}{(z-z_1)(z-z_1^*)}$ avec : $z_1=e^{-m\omega_0 T}e^{j\omega_0' T}$ $z_1^*=e^{-m\omega_0 T}e^{-j\omega_0' T}$