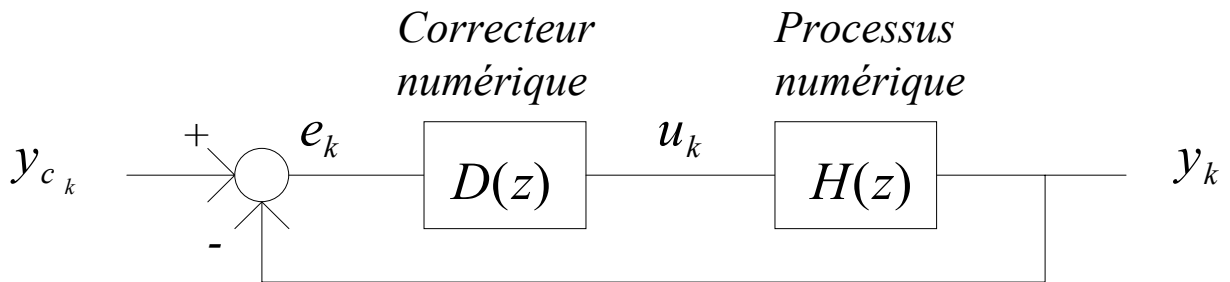


## 5. Correction numérique - Régulateurs standards

### Correcteurs numériques standards



$H(z)$  :

- naturellement numérique,

ou • numérisation d'un processus analogique  $H_A(p)$

$$H(z) = Z[B_0(p)H_A(p)] = Z\left[\left(\frac{1 - e^{-pT}}{p}\right)H_A(p)\right]$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]$$

## Correcteur P (proportionnel)

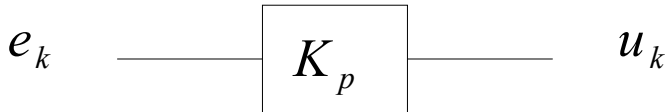
- *But* : - Accroître la précision du SB ( $K_p \nearrow$ )  
ou - stabiliser le SB ( $K_p \searrow$ ).

- *Relation de base* :  $u_k = K_p e_k$

- *Fonction de Transfert (FT)* :  $U(z) = K_p E(z)$

$$\rightarrow D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p$$

- *Algorithme de réglage* :  $u_k = K_p e_k$

- *Diagramme structurel* : 

- *Choix du paramètre  $K_p$*  :

Selon les contraintes sur la précision et la stabilité.

## Correcteur I (Intégral)

*Synthèse par Transposition num. de l'intégration analog.*

• *Relation de base :* 
$$u_k = K_i \sum_{m=0}^k e_m \quad (1)$$

• *Fonction de Transfert (FT) :* la TZ de (1) donne :

$$U(z) = K_i \frac{z}{z-1} E(z) \quad \rightarrow \quad D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_i \frac{z}{z-1}$$

• *Algorithme de réglage :*

. A partir de la  $TZ^1$  de la FT :

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_i \frac{1}{1-z^{-1}} \xrightarrow{TZ^{-1}} u_k = u_{k-1} + K_i e_k$$

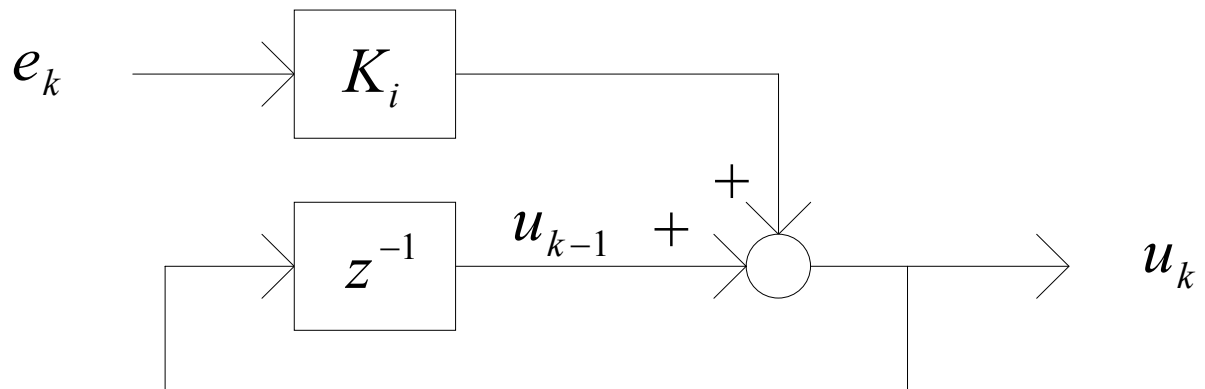
$$(1-z^{-1})U(z) = K_i E(z) \quad \rightarrow \quad U(z) = z^{-1}U(z) + K_i E(z) \quad \xrightarrow{TZ^{-1}} \quad u_k = u_{k-1} + K_i e_k$$

. Ou directement à partir de la relation de base :

$$u_k = K_i \sum_{m=0}^k e_m = K_i \sum_{m=0}^{k-1} e_m + K_i e_k = u_{k-1} + K_i e_k$$

*initialisation :*  $u_{-1} = 0$ .

- *Diagramme structurel :*



## Correcteur D (Dérivateur)

*Synthèse par Transposition num. de la dérivation analog.*

- *Relation de base :*

$$u_k = K \left( \frac{e_k - e_{k-1}}{T} \right) = K_d (e_k - e_{k-1})$$

avec : 
$$K_d = \frac{K}{T}$$

- *Fonction de Transfert (FT) :*

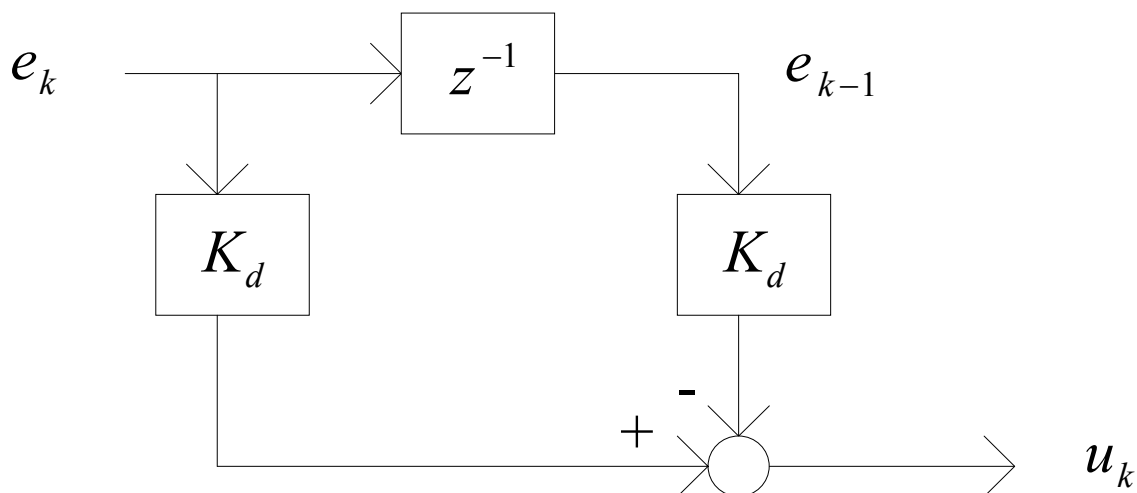
$$U(z) = K_d \frac{z-1}{z} E(z) \rightarrow D(z) = K_d \frac{z-1}{z}$$

- *Algorithme de réglage :*

On a directement d'après la relation de base :

$$u_k = K_d (e_k - e_{k-1}) \text{ avec initialisation : } e_{-1} = 0.$$

- *Diagramme structurel :*



Les correcteurs Intégral (I) et Dérivé (D) s'emploient rarement seuls mais quasi-généralement accompagnés d'une action proportionnelle (→ correcteurs PI et PD).

Un correcteur I seul par exemple risque de déstabiliser le système → correcteur PI utilisé plutôt.

## Correcteur P.I. (Proportionnel Intégral)

*But :* Comme en analogique : *accroître la précision* par un retard de phase et une augmentation du gain statique.

*Synthèse par Transposition num. de l'intégration analog.*

• *Relation de base :*

$$u_k = \underbrace{K_p e_k}_P + K_i \underbrace{\sum_{m=0}^k e_m}_I$$

• *Fonction de Transfert (FT) discrète :*

d'après les tables :

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_i \frac{z}{z-1}$$

$$\rightarrow D(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z-1} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} b_0 = -K_p \\ b_1 = K_p + K_i \end{cases}$$

• *Algorithme de réglage :*

$$\left| \begin{array}{l} u_k = (K_p + K_i) e_k + x_{k-1} \\ \text{avec: } x_k = x_{k-1} + K_i e_k \\ \text{initialisation: } x_{-1} = 0 \end{array} \right.$$

ou encore :

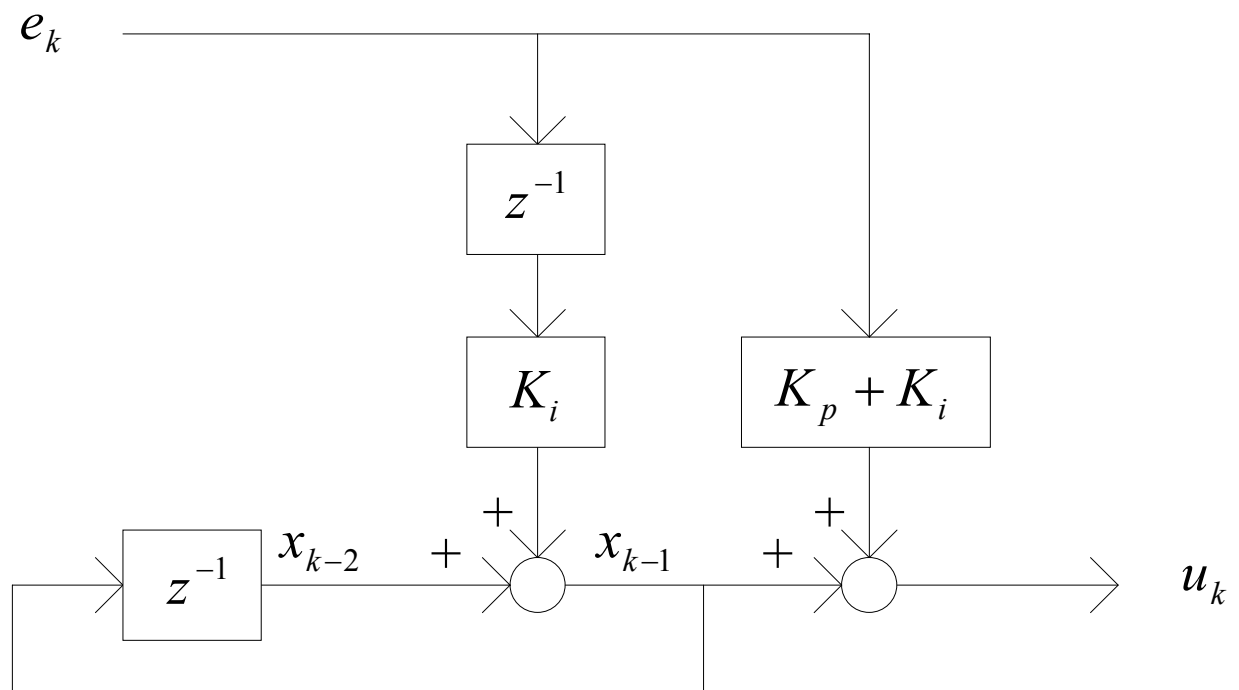
$$U(z) = D(z)E(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z - 1} E(z) = \frac{b_1 + b_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} E(z)$$

$$\rightarrow (1 - z^{-1})U(z) = (b_1 + b_0 z^{-1})E(z)$$

$$\xrightarrow{TZ^{-1}} u_k = u_{k-1} + b_1 e_k + b_0 e_{k-1}$$

$$(init. : u_{-1} = 0, e_{-1} = 0)$$

• *Diagramme structurel :*





- *Choix des paramètres du correcteur  $K_p$  et  $K_i$  :*

Les coefficients  $K_p$  et  $K_i$  sont déterminés en écrivant que le SB corrigé doit être stable (et éventuellement spécifications supplémentaires de précision ou rapidité).

### Correcteur PD (Proportionnel Dérivé)

*But :* Comme en analogique : *accroître la stabilité et la rapidité* par une avance de phase.

*Synthèse par Transposition num. de la dérivation analog.*

- *Relation de base :* 
$$u_k = \underbrace{K_p e_k}_P + \underbrace{K_d (e_k - e_{k-1})}_D$$

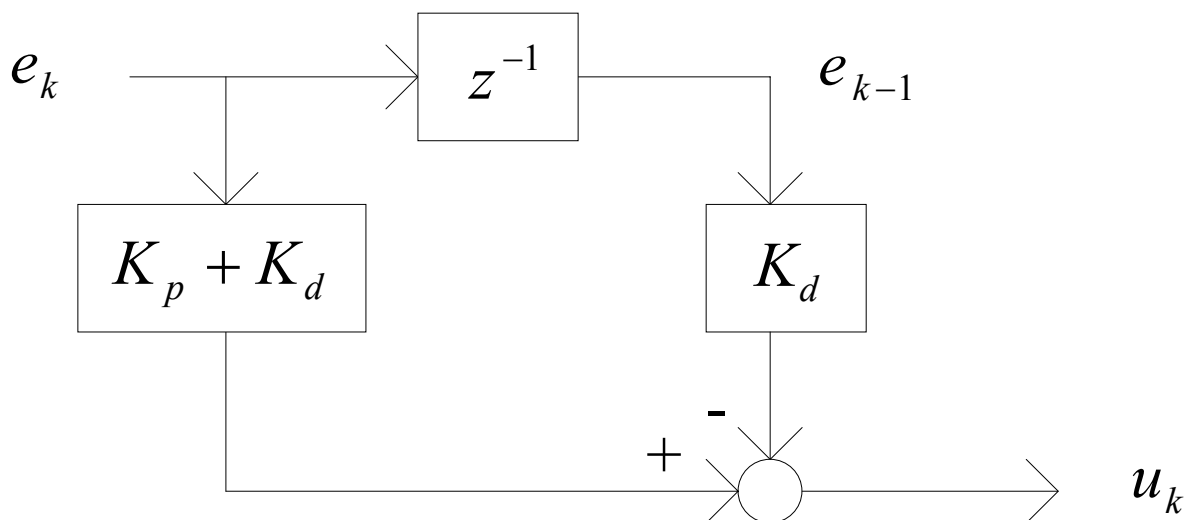
- *FT discrète :* 
$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_d \frac{z-1}{z}$$

$$\rightarrow D(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z} \quad \text{avec : } \begin{cases} b_0 = -K_d \\ b_1 = K_p + K_d \end{cases}$$

- *Algorithme de réglage :*

$$\left| \begin{array}{l} u_k = (K_p + K_d) e_k - K_d e_{k-1} \\ \text{initialisation : } e_{-1} = 0 \end{array} \right.$$

- *Diagramme structurel :*



- *Choix des paramètres du correcteur  $K_p$  et  $K_d$  :*

Ces coefficients sont déterminés par la condition de stabilité pour le SB corrigé (et éventuellement spécifications supplémentaires de précision ou rapidité).

## P.I.D.numérique

*But :* Comme en analogique :

*améliorer précision, stabilité et rapidité.*

*Synthèse par Transposition num. des opérateurs analog.*

• *Relation de base :*

$$u_k = K_p e_k + K_i \sum_{m=0}^k e_m + K_d (e_k - e_{k-1})$$

• *Fonction de Transfert (FT) discrète :*

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_i \frac{z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{z}$$

$$\rightarrow D(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z(z-1)} \quad \left| \begin{array}{l} b_0 = K_d \\ b_1 = -(K_p + 2K_d) \\ b_2 = K_p + K_i + K_d \end{array} \right.$$

• *Algorithme de réglage :*

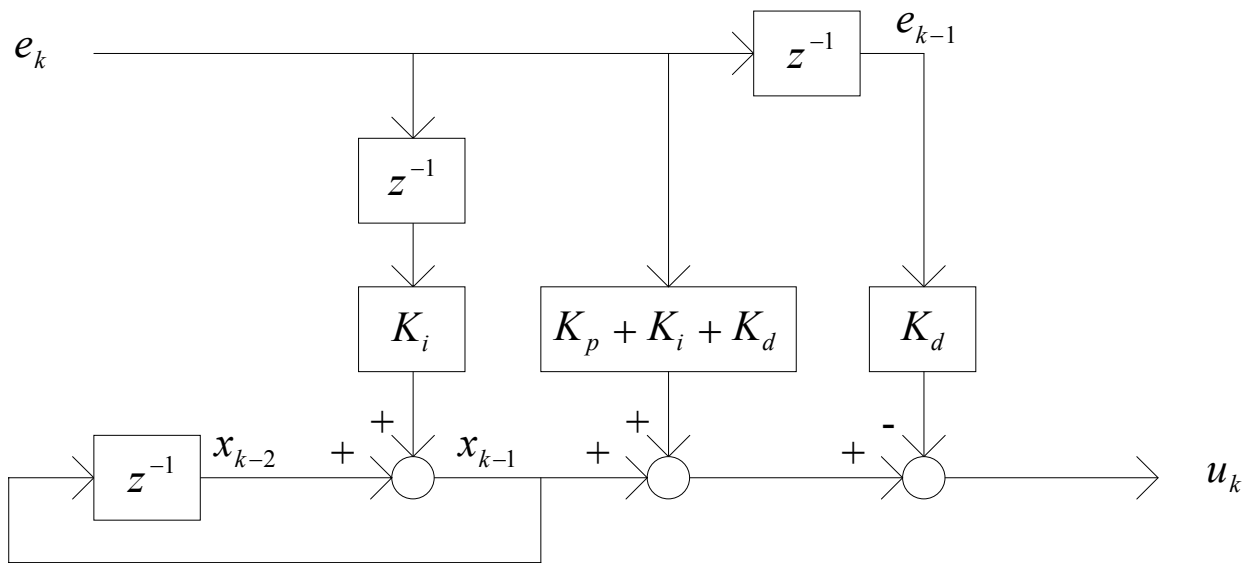
$$u_k = K_i \sum_{m=0}^{k-1} e_m + (K_p + K_d + K_i)e_k - K_d e_{k-1}$$

Posons :

$$\left| \begin{array}{l} x_{k-1} = K_i \sum_{m=0}^{k-1} e_m \\ K_{pid} = K_p + K_i + K_d \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} u_k = x_{k-1} + K_{pid} e_k - K_d e_{k-1} \\ \text{avec: } x_k = x_{k-1} + K_i e_k \\ \text{initialisation: } \left| \begin{array}{l} e_{-1} = 0 \\ x_{-1} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- *Diagramme structurel :*



- *Choix des paramètres du correcteur  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  :*

Ces coefficients sont déterminés par la condition de stabilité pour le SB corrigé (et éventuellement spécifications supplémentaires de précision ou rapidité).

### Choix du correcteur standard

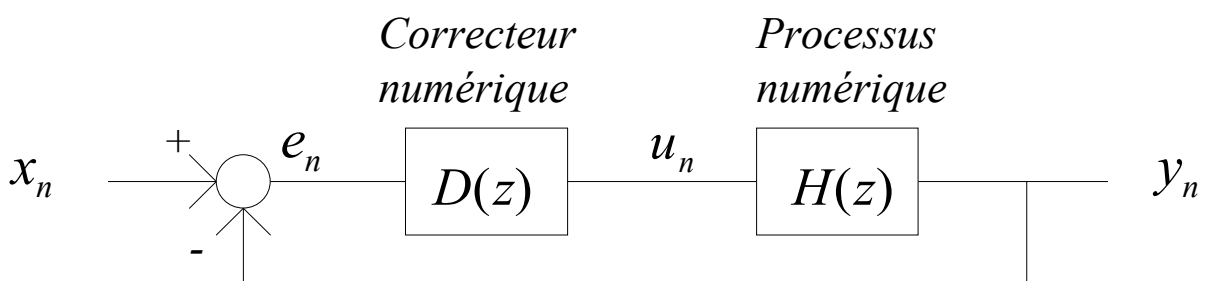
- Si instabilité (ou lenteur) du SB :  $\rightarrow$  PD
- Si imprécision :  $\rightarrow$  PI
- Si les deux :  $\rightarrow$  PID

- Les coefficients des correcteurs sont déterminés par la condition de stabilité pour le SB corrigé (et éventuellement spécifications supplémentaires de précision ou rapidité).
- Si le degré d'instabilité ou d'imprécision est important (*plusieurs* pôles instables, *plusieurs* ordres d'erreur à annuler), il faudra autant de correcteurs standards élémentaires en cascade.  
(*ex.* : 2 pôles instables → 2 correcteurs PD en cascade).

## Système à réponse « pile »

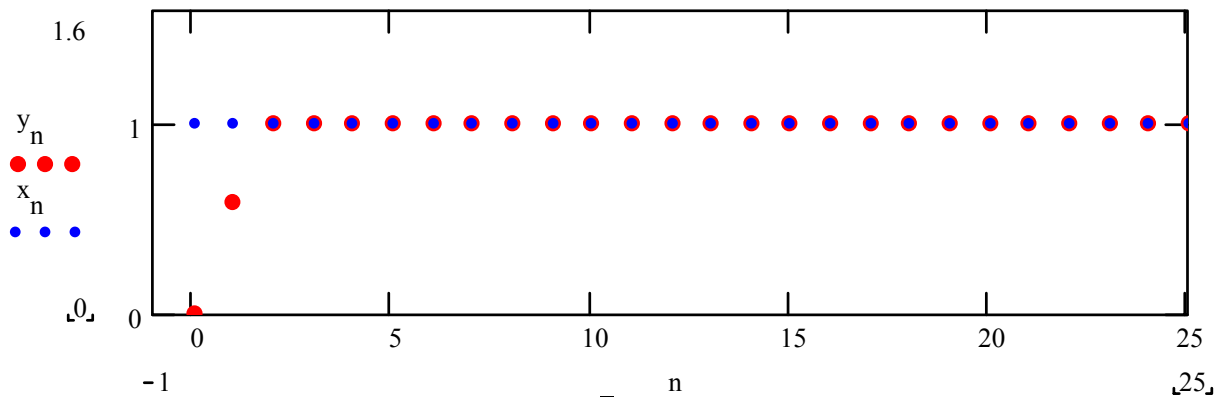
### Définition

Un système est dit à réponse « pile » (*deadbeat response*), lorsque la sortie atteint son régime définitif, pour une entrée type donnée, en un nombre fini ( $m$ ) d'échantillons.



$$y_n = x_n \quad \text{pour} \quad n \geq m$$

L'erreur est annulée en un nombre fini  $m$  de coups :  
réponse pile en  $m$  coups.



*Condition principale que doit satisfaire un système pour être à réponse pile*

$n$  : degré de la consigne (1 pour échelon, 2 pour rampe ...)

→ Le processus  $H(z)$  doit comporter au moins  $n$  intégrateurs purs.