6. Performances d'un SAL échantillonné : Stabilité-Précision-Rapidité

Zéros - Causalité (rappels)

Zéros d'un système numérique

Comme en analogique, ils déterminent si le système est à phase minimale.

Un zéro « instable » (≡ de module > 1) suffit à rendre un système à « non minimum de phase » (≡ système non rapide par rapport à un système à minimum de phase).

Les zéros d'un système caractérisent sa rapidité.

Causalité

Soit un système de FT :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i z^i}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i z^i}$$

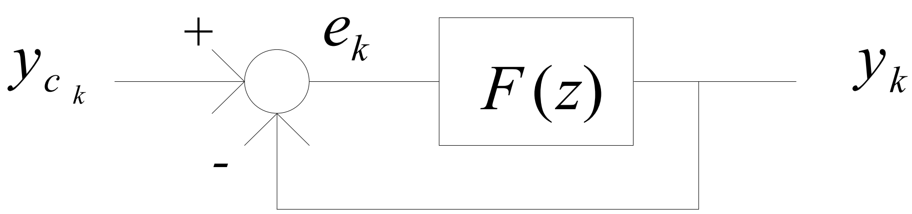
La causalité du système impose $n \geq m$ sans quoi la récurrence temporelle est exprimée en fonction du futur et non du passé.

Ex. : $H(z) \sim z^{-1} = \dfrac{Y(z)}{X(z)} \quad \rightarrow \quad Y(z) = z^{-1}X(z) \quad \xrightarrow{TZ^{-1}} \quad y_k = x_{k-1}$

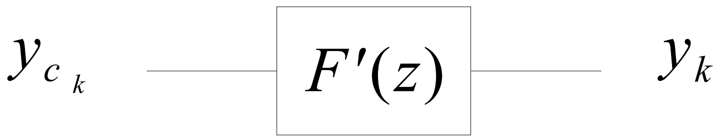
$$H(z) \sim z^{+1} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \rightarrow \quad Y(z) = z^{+1}X(z) \quad \xrightarrow{TZ^{-1}} \quad y_k = x_{k+1}$$

Stabilité d'un système numérique

Soit un Système Bouclé à retour unitaire et comparateur +/-, de FTBO $F(z)$ et de FTBF $F'(z) = \dfrac{F(z)}{1+F(z)}$.



≡



Stabilité : critère général

Un système numérique est stable si et seulement si tous les pôles de sa FT sont situés à l'intérieur du disque de rayon unité (cercle de rayon 1).

Il est d'autant plus stable (amorti) que les pôles sont plus à l'intérieur du disque.

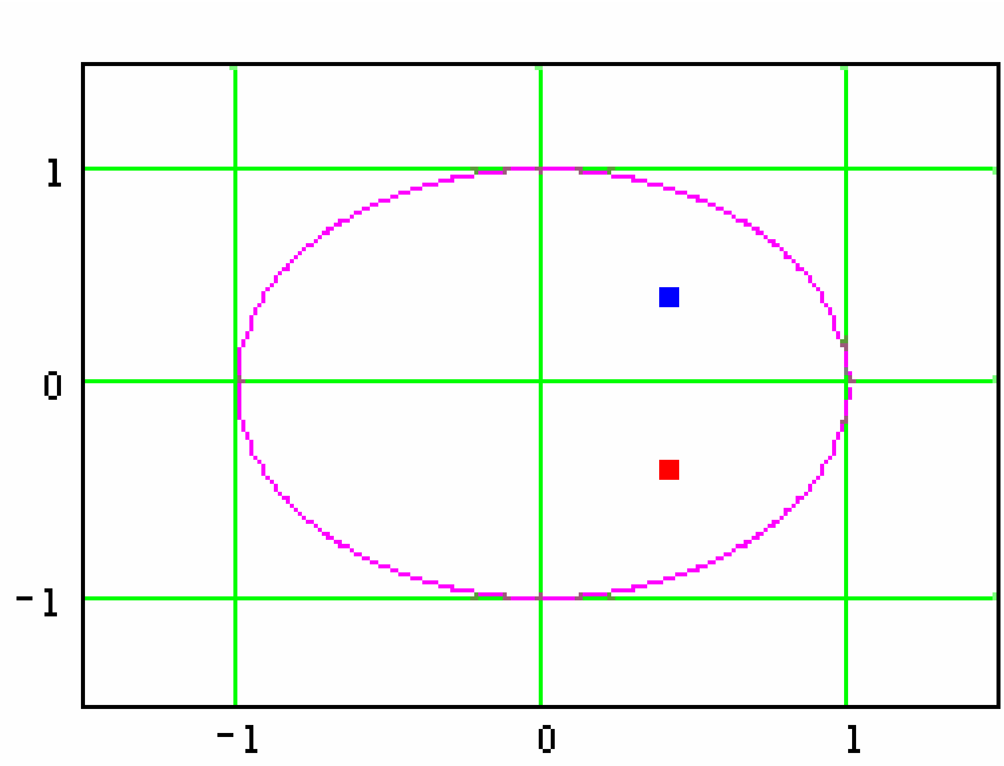
Lieu des racines

Cette méthode consiste, comme en analogique, à tracer dans le plan complexe, le lieu des racines du dénominateur, noté $Q(z)$, de la FT du système dont on veut étudier la stabilité.

Exemple : Stabilité de la boucle fermée $F'(z)$?
$\rightarrow$ on forme $Q(z) = 1 + F(z)$
dont on cherche les racines $Q(z) = 0$.

Le Système Bouclé $F'(z)$ est stable si le lieu de $Q(z)$ reste situé à l'intérieur du cercle unité.

Exemple : Système stable d'ordre 2 (2 pôles) :



Critère de Jury (critère algébrique)

Le critère de Jury est aux systèmes numériques en z ce qu'est le critère de Routh aux systèmes analogiques en p.

La stabilité est conditionnée par la place des pôles, c'est à dire par la place des racines de l'équation caractéristique :

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

($a_n > 0$) (n entier > 0) (les coefficients a_i sont réels)

par rapport au cercle unité.

$Q(z)$: dénominateur de la FT du système dont on veut étudier la stabilité :

Stabilité de la BO $F(z)$?

$\rightarrow$ $Q(z) =$ dénominateur de $F(z)$

Stabilité de la BF $F'(z)$?

$\rightarrow$ $Q(z) = 1 + F(z)$

Le système décrit par $Q(z)$ est stable si et seulement si :

① $a_n > |a_0|$

et : ② $Q(z)\big|_{z=1} > 0$

et : ③ $Q(z)\big|_{z=-1} > 0$ si n pair

$Q(z)\big|_{z=-1} < 0$ si n impair

et si $n \geq 3$:

④ ≡ { (n - 2) sous-conditions ($n \geq 3$) :

(si $n < 3$, la condition ④ est inexistante)

④

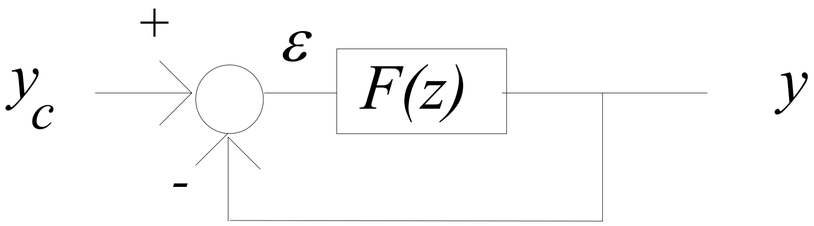
$$\begin{cases} |b_{n-1}| > |b_0| \quad \text{avec :} \quad b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \qquad k = n-1 \quad \text{et} \quad k = 0 \\ \text{et} \\ |c_{n-2}| > |c_0| \quad \text{avec :} \quad c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \qquad k = n-2 \quad \text{et} \quad k = 0 \\ \text{et} \ldots \text{ jusqu'à :} \\ |q_2| > |q_0| \quad \text{avec :} \quad q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \qquad k = 2 \quad \text{et} \quad k = 0 \end{cases}$$

④ s'écrit :

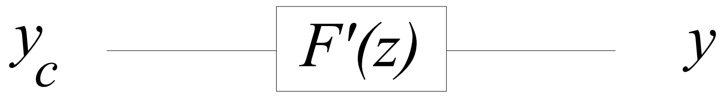
$$
\begin{cases}
|b_{n-1}| > |b_0| \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix} = a_n^2 - a_0^2 \\ b_0 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_n - a_0 a_{n-1} \end{cases} \\
\text{et} \\
|c_{n-2}| > |c_0| \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} c_{n-2} = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_0 \\ b_0 & b_{n-1} \end{vmatrix} = b_{n-1}^2 - b_0^2 \\ c_0 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 b_{n-1} - b_0 b_{n-2} \end{cases} \\
\text{et ... jusqu'à :} \\
|q_2| > |q_0| \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} q_2 = \begin{vmatrix} p_3 & p_0 \\ p_0 & p_3 \end{vmatrix} = p_3^2 - p_0^2 \\ q_0 = \begin{vmatrix} p_3 & p_2 \\ p_0 & p_1 \end{vmatrix} = p_1 p_3 - p_0 p_2 \end{cases}
\end{cases}
$$

5. Précison statique

Soit le Système Bouclé (SB) de Boucle Ouverte (BO)
$F(z)$ (SB à comparateur +/-) échantillonné au pas T :



$\equiv$



FTBF : $$F'(z) = \frac{F(z)}{1+F(z)}$$

Erreur : $$\varepsilon(kT) = y_c(kT) - y(kT)$$

notée : $$\varepsilon_k = y_{c_k} - y_k$$

Soit $E(z)$ la TZ de $\varepsilon(kT)$. On a :

$$E(z) = Y_c(z) - Y(z) = \frac{1}{1+F(z)} Y_c(z)$$

On obtient l'erreur statique : $\varepsilon = \lim_{k \to \infty} \varepsilon(kT)$

par l'utilisation du théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon = \lim_{k \to \infty} \varepsilon\,(kT) = \lim_{z \to 1} (z-1) E(z)$$

(le th. de la valeur finale n'est applicable que si les pôles de $E(z)$ *sont stables, donc si* $F'(z)$ *est stable).*

En mettant $F(z)$ sous la forme :

$$F(z) = \frac{K}{(z-1)^n} \cdot \frac{N(z)}{D(z)}$$

pour mettre en évidence le nombre n d' « intégrateurs » (purs) numériques de la BO

(Intégrateur num. : terme $\dfrac{1}{z-1}$ en facteur dans la BO)

On a :

$$\boxed{E(z) = \frac{Y_c(z)}{1+F(z)} = \frac{Y_c(z)}{1+K\dfrac{1}{(z-1)^n}\dfrac{N(z)}{D(z)}}}$$

L'erreur, donc la précision, dépend du type de consigne.

On a, selon le type de consigne :

- $\varepsilon \overset{\Delta}{=} \varepsilon_p$: erreur statique de position :

  consigne = échelon : $y_c(kT) = Y_0\,\Gamma(kT)$

- $\varepsilon \overset{\Delta}{=} \varepsilon_v$: erreur statique de vitesse :

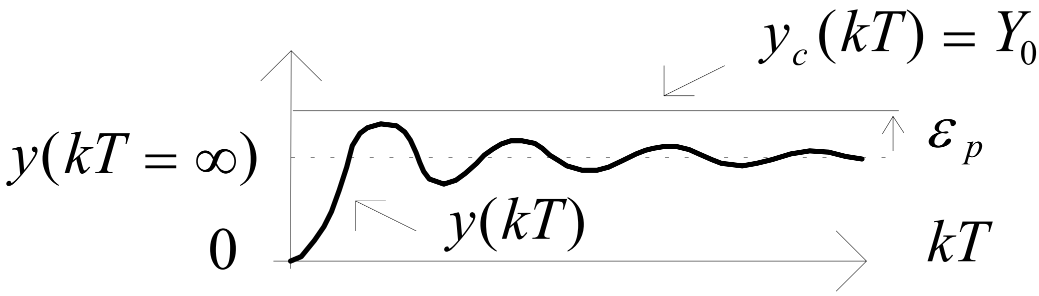
  consigne = rampe : $y_c(kT) = a kT\,\Gamma(kT)$

- $\varepsilon \overset{\Delta}{=} \varepsilon_a$: erreur statique d'accélération :

  consigne = parabole : $y_c(kT) = \frac{1}{2} b k^2 T^2\,\Gamma(kT)$

• **Précision en position** (consigne : échelon d'amplitude Y_0)

$$y_c(kT) = Y_0\,\Gamma(kT) \xrightarrow{TZ} Y_c(z) = \frac{Y_0}{1-z^{-1}}$$



Ex. :

$$E(z) = \frac{Y_c(z)}{1+F(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}\,\frac{Y_0}{1+F(z)}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \to 1} \frac{zY_0}{1+F(z)} = \frac{Y_0}{1+K_p}$$ avec

$$K_p \stackrel{\Delta}{=} F_0 \stackrel{\Delta}{=} \lim_{z \to 1} F(z) = \lim_{z \to 1} K\frac{1}{(z-1)^n}\,\frac{N(z)}{D(z)}$$ Gain statique de BO

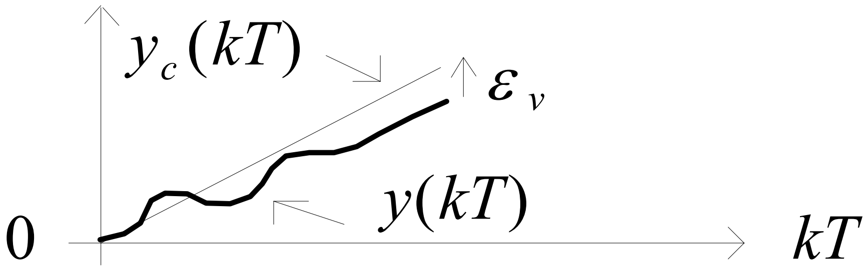
• $n = 0$: $\varepsilon_p = Y_0 \dfrac{1}{1+K_p}$ avec : $K_p \stackrel{\Delta}{=} F_0 \stackrel{\Delta}{=} \lim\limits_{z \to 1} F(z)$

• $n \geq 1$: $\varepsilon_p = 0$ ($K_p \to \infty$)

• Précision en vitesse (consigne : rampe de pente a)

$$y_c(kT) = akT\,\Gamma(kT) \xrightarrow{TZ} Y_c(z) = \frac{aTz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Ex. :



$$E(z) = \frac{Y_c(z)}{1+F(z)} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\,\frac{a}{1+F(z)}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) = \lim_{z\to 1}\frac{T}{1-z^{-1}}\,\frac{a}{1+F(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{T}{1-z^{-1}}\,\frac{a}{F(z)} = \frac{a}{K_v}$$

avec :

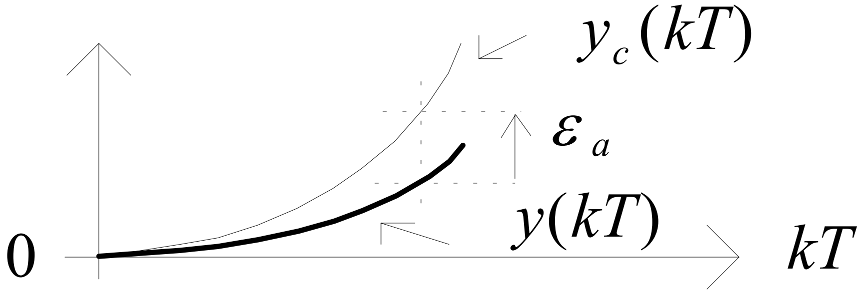
$$K_v \overset{\Delta}{=} F_{10} \overset{\Delta}{=} \lim_{z\to 1}\frac{(1-z^{-1})}{T}F(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(1-z^{-1})}{T}K\frac{1}{(z-1)^n}\,\frac{N(z)}{D(z)}$$

- $n = 0$: $\varepsilon_v = \infty$ $\quad (K_v \to 0)$
- $n = 1$: $\varepsilon_v = \dfrac{a}{K_v}$ $\quad K_v \overset{\Delta}{=} F_{10} \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(1-z^{-1})}{T}F(z)$
- $n \geq 2$: $\varepsilon_v = 0$ $\quad (K_v \to \infty)$

• **Précision en accélération** (consigne : parabole de coeff. b)

$$y_c(kT) = \frac{b}{2}(kT)^2\,\Gamma(kT) \xrightarrow{TZ} Y_c(z) = \frac{b}{2}\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

Ex. :



$$E(z) = \frac{Y_c(z)}{1+F(z)} = \frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}\,\frac{b/2}{1+F(z)}$$

$$\varepsilon_a = \lim_{z\to 1}\,(z-1)E(z) = \lim_{z\to 1}\frac{T^2(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^2}\,\frac{b/2}{1+F(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{T^2(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^2}\,\frac{b/2}{F(z)} = \frac{b}{K_a}$$

avec :

$$K_a \stackrel{\Delta}{=} F_{20} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{z\to 1}\frac{2(1-z^{-1})^2}{T^2(1+z^{-1})}F(z) = \lim_{z\to 1}\frac{2(1-z^{-1})^2}{T^2(1+z^{-1})}K\frac{1}{(z-1)^n}\frac{N(z)}{D(z)}$$

• $n \le 1$: $\varepsilon_a = \infty$ $\qquad$ ($K_a \to 0$)

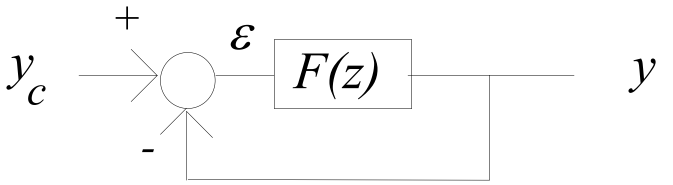
• $n = 2$: $\varepsilon_a = \dfrac{b}{K_a}$ $\qquad$ $K_a \stackrel{\Delta}{=} F_{20} \stackrel{\Delta}{=} \lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(1-z^{-1})^2}{T^2}F(z)$

• $n \ge 3$: $\varepsilon_a = 0$ $\qquad$ ($K_a \to \infty$)

• Résumé : Erreurs statiques absolues (non unitaires)

n : *nombre d'intégrateurs dans la BO* $F(z)$

(*≡facteurs* $\dfrac{1}{z-1}$) $\qquad T$ *: période d'échantillonnage*



$y(kT)$	Echelon de position $y_c(kT) = Y_0\,\Gamma(kT)$	Rampe de vitesse $y_c(kT) = akT\,\Gamma(kT)$	Parabole d'accélération $y_c(kT) = \frac{b}{2}(kT)^2\,\Gamma(kT)$
$n = 0$	ε_p $\varepsilon_p = Y_0 \dfrac{1}{1+K_p}$	ε_v $\varepsilon_v = \infty$	ε_a $\varepsilon_a = \infty$
$n = 1$	ε_p $\varepsilon_p = 0$	ε_v $\varepsilon_v = \dfrac{a}{K_v}$	ε_a $\varepsilon_a = \infty$
$n = 2$	ε_p $\varepsilon_p = 0$	ε_v $\varepsilon_v = 0$	ε_a $\varepsilon_a = \dfrac{b}{K_a}$
$n \geq 3$	ε_p $\varepsilon_p = 0$	ε_v $\varepsilon_v = 0$	ε_a $\varepsilon_a = 0$
	$K_p \overset{\Delta}{=} F_0 \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{z\to 1} F(z)$ Gain statique de BO	$K_v \overset{\Delta}{=} F_{10} \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(1-z^{-1})}{T} F(z)$	$K_a \overset{\Delta}{=} F_{20} \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(1-z^{-1})^2}{T^2} F(z)$

• **Résumé** *:* **Erreurs statiques absolues (unitaires)**

Erreurs statiques absolues (à entrées unitaires) du SB **:**

Elles sont obtenues à partir des erreurs absolues précédentes lorsque le coefficient de l'entrée de consigne est unitaire :

$Y_0 = 1$, $a = 1$, $b = 1$:

• Position : $\varepsilon_p = \dfrac{1}{1 + K_p}$ avec $K_p = \lim\limits_{z \to 1} F(z)$

• Vitesse : $\varepsilon_v = \dfrac{1}{K_v}$ avec $K_v = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{(1 - z^{-1}) F(z)}{T}$

• Accélération : $\varepsilon_a = \dfrac{1}{K_a}$ avec $K_a = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{(1 - z^{-1})^2}{T^2} F(z)$
