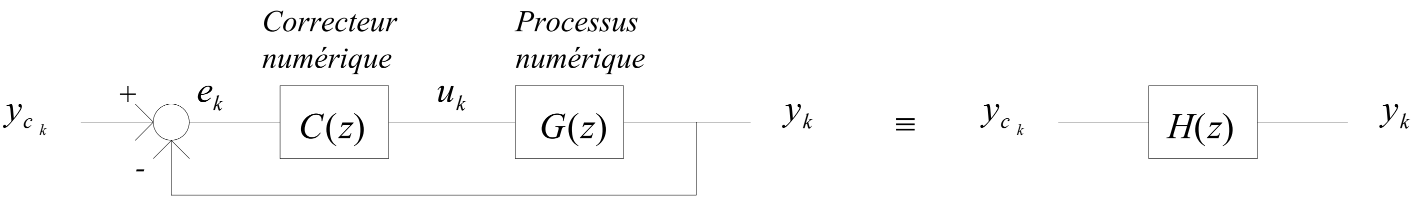
7. Synthèse des correcteurs numériques. Réponse pile

Synthèse de la loi de commande (systèmes « compensables »)

Soit le Système Bouclé :



2 orientations pour déterminer le correcteur $C(z)$ du SB :

Synthèse par la Boucle Ouverte :

Compensation par $C(z)$ des pôles et des zéros de $G(z)$

Synthèse par la Boucle Fermée :

On se donne un modèle $H(z)$ pour le SB

Synthèse par la Boucle Ouverte :
Compensation par $C(z)$ des pôles et des zéros de $G(z)$

FTBF : $$H(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

Même si $G(z)$ est la BO et non la BF, compenser les pôles et les zéros de $G(z)$ par $C(z)$ limite l'ordre du SB et donc tend à stabiliser le SB.

Stabilité, rapidité :

- $C(z)$ doit être en $\dfrac{1}{G(z)}$

$\rightarrow$ les zéros de $C(z)$ doivent compenser les pôles de $G(z)$ (stabilité)
les pôles de $C(z)$ doivent compenser les zéros de $G(z)$ (rapidité)

Précision statique :

- $C(z)G(z)$ doit posséder les intégrations $\dfrac{1}{z-1}$ pour une bonne

précision selon l'entrée $\rightarrow$ $$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{1}{(z-1)^m}$$

(m : selon le type de précision souhaitée)

$m = 1$: Précision statique parfaite de position.
$m = 2$: Précisions statiques parfaites de position et de vitesse.

Stabilité, rapidité :

• Le gain de boucle est réglé pour contrôler l'amortissement (et le dépassement indiciel) du 2nd ordre équivalent au SB :

$$\rightarrow \quad C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{1}{(z-1)^m} K$$

Stabilité, rapidité :

• $C(z)$ doit apporter les zéros nécessaires (avance de phase) (termes $(z - z_i)$ en facteur) pour réduire le temps de réponse.

Finalement, on obtient :

$$\rightarrow \quad \boxed{C(z) = (z - z_0) \frac{1}{G(z)} \frac{1}{(z-1)^m} K}$$

Synthèse par la Boucle Fermée

Méthode précédente : Comme $H(z)=\dfrac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}$ on a :

$$C(z)=\frac{K}{G(z)}\frac{(z-z_0)}{(z-1)^m} \quad \to \text{FTBF : } \quad H(z)=\frac{K(z-z_0)}{K(z-z_0)+(z-1)^m}$$

Méthode de synthèse par la Boucle Fermée :

On se fixe un modèle $H(z)=\dfrac{B_m(z)}{A_m(z)}$ pour la Boucle Fermée de gain statique 1 (pour annuler l'erreur statique de position)

et on détermine la loi de commande pour y parvenir.

FTBF : $H(z)=\dfrac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} \to \boxed{C(z)=\dfrac{1}{G(z)}\dfrac{H(z)}{1-H(z)}}$

Modèles les plus courants :

1) $$H(z) = \frac{1 + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}}{(1 + a_{n-1} + \cdots + a_0)}$$

Nombre fini de termes $\rightarrow$ annule $e_p(kT)$ en n coups *(réponse pile)*

2) $$H(z) = \frac{(1 + a_1 + a_0)}{(1 - b)} \frac{z - b}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

(méthode des pôles dominants (pôles du 2nd ordre dominant))

$H(z)$: 2nd ordre d'amortissement réglable par a_1 et a_0
et dont le zéro b fixe le dépassement indiciel.

Gain statique de $H(z)$ = 1 $\rightarrow$ $e_p = e_p(kT = \infty) = 0$

Rappel : Gain statique de $H(z)$ = $\lim_{z \to 1} H(z)$

On devra toujours veiller à :

- Obtenir un *correcteur réalisable* donc *causal* (*temps réel*)
- Obtenir un *système stable* en Boucle Fermée.
- *Ne pas compenser un zéro « instable »* (zéro de module ≥ 1) *du processus* en BO par un pôle (instable donc) du correcteur.

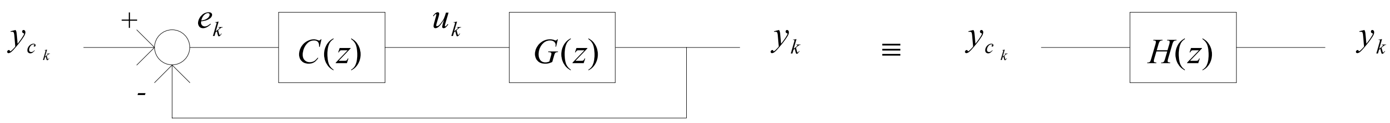
Synthèse par la méthode des pôles dominants (méthode de Zdan)

But de la méthode

Obtenir un Système en BF de comportement voisin de celui d'un 2nd ordre (caractérisé par une paire de pôles dominants).

Principe de la méthode

Schéma de réglage



$C(z)$ doit comporter :

1. Des pôles et des zéros compensant les zéros et les pôles de $G(z)$ situés à l'intérieur du cercle unité du plan z.

2. Autant de pôles à $z = 1$ qu'il est nécessaire, compte-tenu de ceux de $G(z)$ tel que l'erreur statique soit nulle, selon la précision voulue.

3. Un gain ajustable K_D .

4. Autant de paramètres (A_i, B_i) qu'il y a de spécifications (amortissement, rapidité ...) à satisfaire.

Ces paramètres interviennent dans des expressions de la forme :

$$\frac{1+A_1 z^{-1}}{1+B_1 z^{-1}}, \quad \frac{1+A_1 z^{-1}}{1+B_1 z^{-1}+B_2 z^{-2}}, \quad \frac{1+A_1 z^{-1}+A_2 z^{-2}}{1+B_1 z^{-1}}, \quad \frac{1+A_1 z^{-1}+A_2 z^{-2}}{1+B_1 z^{-1}+B_2 z^{-2}}, \quad \text{etc ...}$$

Ex. : 2 spécifications induisent 2 paramètres: A_1, B_1 ;
3 spécifications, 3 paramètres: A_1, B_1, B_2 ou A_1, A_2, B_1.

$$\rightarrow \quad \boxed{C(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{1}{(z-1)^m} \cdot K_D \cdot \left(\frac{1+A_1 z^{-1}+\cdots}{1+B_1 z^{-1}+\cdots} \right)}$$