0. Préambule

SIGNAUX & SYSTEMES

SIGNAUX ≡ *TRAITEMENT DU SIGNAL*

. Conditionnement

. Caractérisation

. Détection - Estimation

. Optimisation

. Modèlisation - Identification

. Codage - Décodage

. Synthèse de signal

SYSTEMES ≡ *AUTOMATIQUE*

. Commande des systèmes

. Asservissement

Plan du cours

ANNEXE

Bibliographie

[8] **A.V. Oppenheim & all** « Signals and systems » *Prentice-Hall*

[11] **Y. Thomas** « Signaux & systèmes linéaires » *Masson*

1. Représentations Temporelles Signaux & Systèmes à TC & TD

SIGNAUX

Représentations Temporelles des Signaux

Signal = fonction

TC : $x(t) = f(t)$

TD : $x(nT) = f(nT)$ ou $x(n) = f(n)$

ou encore : $x_n = f_n$

Exemples de signaux monodimensionnels (≡ 1D) :

Température, compte bancaire, ligne d'image, ...

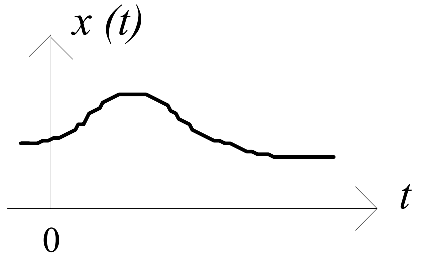
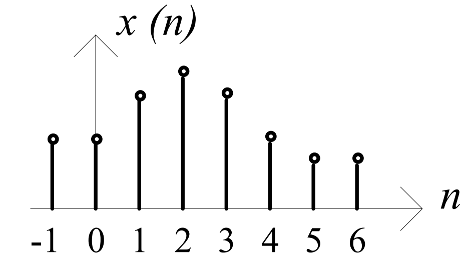
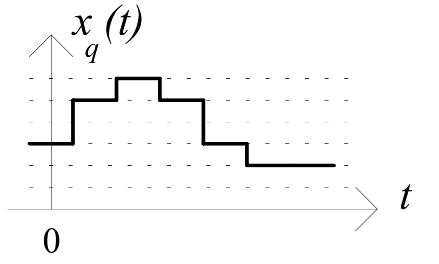
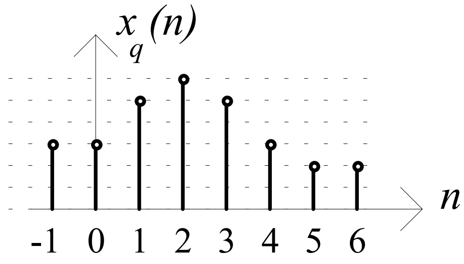
Exemples de signaux complexes (≡ 2D) :

Image , champ de forces ...

Signal à TC, à TD - Signal quantifié ou non

ECHANTILLONNAGE →

QUANTIFICATION ↓

	TC	TD
Amplitude Continue	 signal analogique *(1)*	 signal échantillonné *(2)*
Amplitude Discrète	 signal quantifié *(3)*	 signal numérique *(4)*

Exemples :

(1) signal analogique : Vitesse d'un mobile

(2) signal échantillonné : Taille d'un être humain évaluée régulièrement (chaque année par ex.)

(3) signal quantifié : Compte bancaire (arrondi au centime)

(4) signal numérique : . Population humaine évaluée régulièrement,
ou encore . Niveau de gris des pixels d'une ligne (1D) d'image

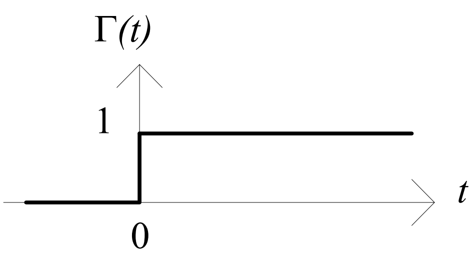
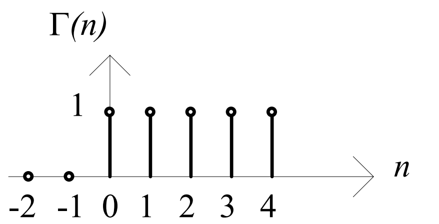
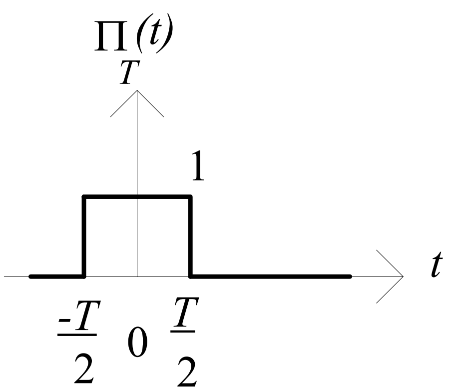
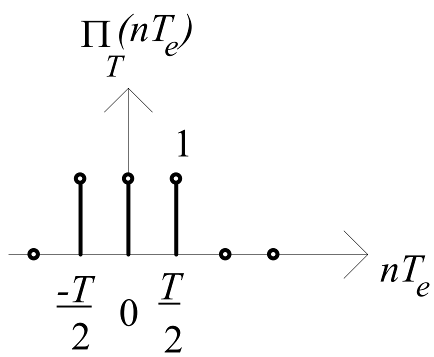
Signal à TD par nature :

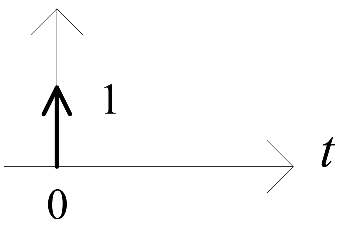
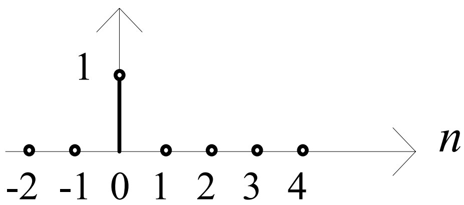
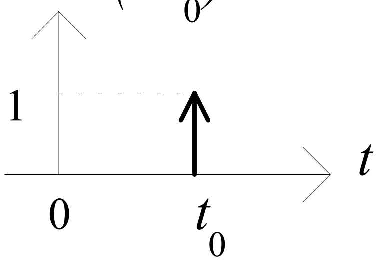
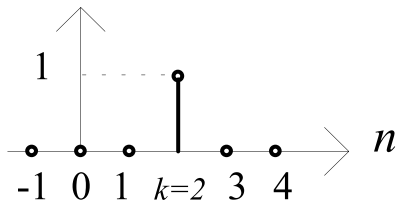
Exemple : Notes d'un élève

Signal à TD par échantillonnage : TC TD

Exemple : Température mesurée périodiquement

Signaux usuels

SIGNAL	TC	TD
Echelon unité *fonction de Heavyside*	$\Gamma(t) = 1$ si $t > 0$ $= 0$ si $t < 0$ (non défini pour $t = 0$) 	$\Gamma(n) = 1$ si $n \geq 0$ $= 0$ sinon 
Fenêtre *largeur T*	$\Pi_T(t) = 1$ si $-T/2 < t < T/2$ $= 0$ sinon 	$\Pi_T(nT_e) = 1$ si $-T/2 \leq nT_e \leq T/2$ $= 0$ sinon 

Impulsion de Dirac *notée* δ (à TD : Kronecker)	$\begin{cases}\delta(t) = \infty \text{ si } t = 0 \\ \delta(t) = 0 \text{ sinon}\end{cases}$	$\begin{cases}\delta(n) = 1 \text{ si } n = 0 \\ \delta(n) = 0 \text{ sinon}\end{cases}$
	$\delta(t) = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\Pi_T(t)$ d'où :	$\delta(n)$ noté aussi $\delta_{n,0}$ $\delta(n-k)$ noté aussi $\delta_{n,k}$
	$\forall\ \varepsilon \neq 0 : \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\,dt = 1$	$\forall k$entier : $\sum_{n=-k}^{k}\delta(n) = 1$
	δ*(t)* 	δ*(n)* 
	δ*(t-t0)* 	δ*(n-k)* 
	$\forall\ \varepsilon\neq 0\ \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\delta(t-t_0)\,dt = 1$	$\forall k$entier $\sum_{n=n_0-k}^{n_0+k}\delta(n-n_0) = 1$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = f(0)}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)dt = f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = f(\tau)}$$

Définitions sur les signaux

- Signal déterministe :

Signal certain, prévisible (≠ *signal aléatoire*)

- Signal causal :

Signal dont on ne connaît pas le futur
Cela se traduit par un signal nul au temps négatif ($t < 0$)

Exemple de signal causal : signal reçu au vol (émission radio)

Exemple de signal non causal : signal enregistré

- Signal stationnaire (ou encore à Temps Invariant (TI)) :

Signal invariant si on change l'origine des temps
Propriétés statistiques invariantes dans le temps

Exemple de signal stationnaire : sinusoïde

Exemple de signal non stationnaire : . sinusoïde avec offset variable dans le temps

- Signal analytique :

Signal décrit par une équation permettant de le calculer, et ce de façon non récurrente

Exemple de signal analytique : $x_n = 2^n$

Exemple de signal non analytique : $x_n = 2x_{n-1}$

- Energie d'un signal :

(TC) $E \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$ (TD) $E \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

- Produit de convolution :

(TC) $$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

(TD) $$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k)$$

- Déconvolution :

(TC) $s(t) = x(t) * y(t) \quad \rightarrow \quad x(t) = s(t) \otimes y(t)$

(TD) $s(n) = x(n) * y(n) \quad \rightarrow \quad x(n) = s(n) \otimes y(n)$

- Fonction de corrélation :

- Fonction d'intercorrélation : Comparaison de 2 signaux

(TC) $$\varphi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau \qquad \varphi_{xy}(t) = x(-t) * y(t)$$

(TD) $$\varphi_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n+k) \qquad \varphi_{xy}(n) = x(-n) * y(n)$$

- Fonction d'autocorrélation : Vitesse de variation du signal

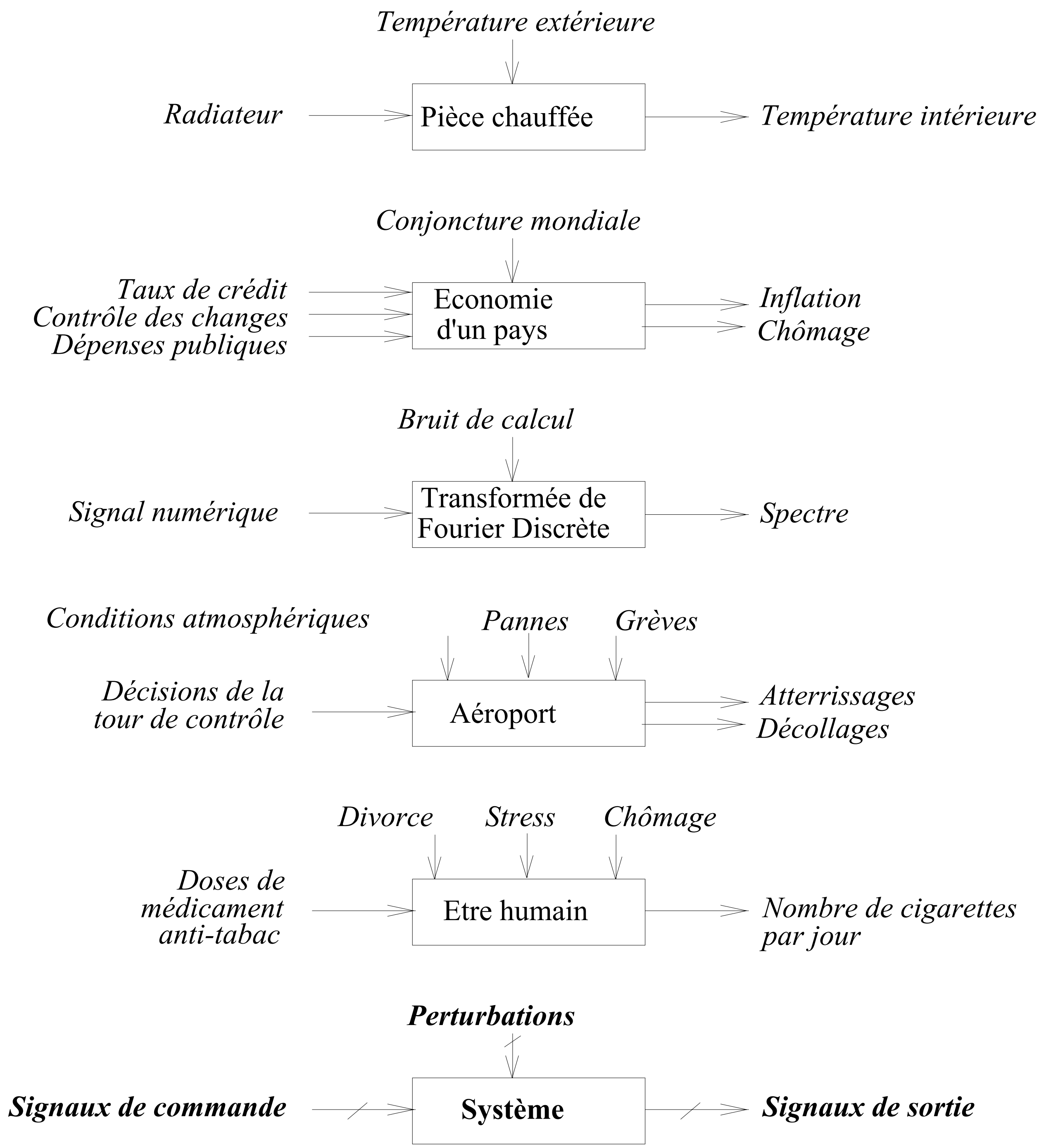
(TC) $$\varphi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau \qquad \varphi_{xx}(t) = x(-t) * x(t)$$

(TD) $$\varphi_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n+k) \qquad \varphi_{xx}(n) = x(-n) * x(n)$$

SYSTEMES

$$x \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow y = \Phi(x)$$

Types de systèmes



RELATIONS D'ENTREE/SORTIE :

- algébriques :

  systèmes statiques

- équations différentielles (TC) / équations aux différences (TD) :

  systèmes dynamiques

- algorithmiques (cas de la Transformée de Fourier Discrète) :

  approche procédurale

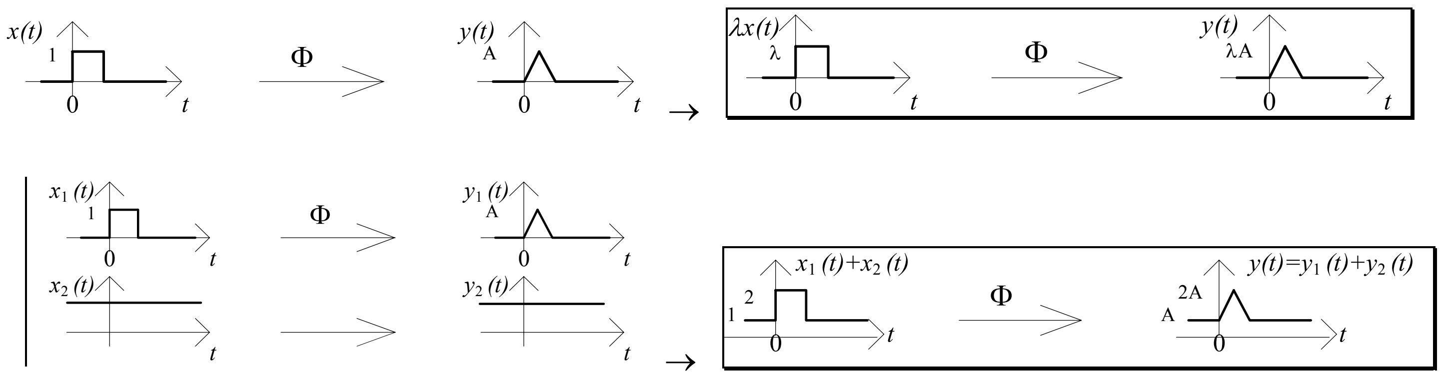
- descriptives (de type « si ..., alors ... » :

  système expert, réseaux de neurones, logique floue ...

Définitions sur les systèmes

- Système Linéaire (SL) :

$$\Phi(\lambda.x) = \lambda.\Phi(x) \quad \text{et} \quad \Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$$



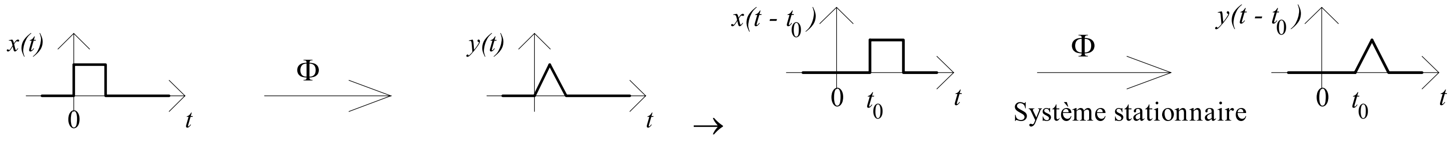
Exemple de SL : Ampli (en lin.) *TC* $y(t) = 3x(t)$ TD $y_n = 3x_n$

Exemples de SNL : Relais, porte logique, délivrance diplôme à un élève, ...

TC $y(t) = x^2(t)$ TD $y_n = x_n^2$

- Système stationnaire (ou encore à Temps Invariant (TI)) :

TC : si $\Phi\left[x(t)\right] \stackrel{\Delta}{=} y(t) \quad \rightarrow \quad \Phi\left[x(t-t_0)\right] = y(t-t_0)$



TD : si $\Phi\left[x(n)\right] \stackrel{\Delta}{=} y(n) \quad \rightarrow \quad \Phi\left[x(n-k)\right] = y(n-k)$

Exemple de STI : Ampli *TC* $y(t) = 3x(t)$ TD $y_n = 3x_n$

Exemples de SNS : Caisse d'épargne à taux d'intérêt variable dans le temps, être humain, ...

TC $y(t) = t\,x(t)$ TD $y_n = n\,x_n$

Erreur à ne pas faire : Décaler le temps en plus de l'entrée !

- RI d'un système : h(t) (TC) h(n) (TD)

$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow h(t)$ (TC)

$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow h(n)$ (TD)

La RI caractérise complètement un SLTI

Connaissance de h $\rightarrow$ prédiction de réponse du SLTI à x quelconque

- Cas essentiel des SLTI :

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \qquad (TC)$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \qquad (TD)$$

Démonstration :

SLTI	***y(t) = h(t) * x(t)*** **(TC)**	***y(n) = h(n) * x(n)*** **(TD)**

TC	**TD**
$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t)$	$\delta(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow h(n)$
$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t-\tau)$	$\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow h(n-k)$
$x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow x(\tau)h(t-\tau)$	$x(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow x(k)h(n-k)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

or :

$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$ $= x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = x(t).1 = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n-k)$ $= x(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) = x(n).1 = x(n)$

d'où :

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow x(t) * h(t)$	$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow x(n) * h(n)$

- Système récursif

La sortie à un instant donné dépend de la sortie à d'autres instants

Exemple : Traitement d'une ligne d'image numérique :

	x(n-1)	***x(n)***	*x(n+1)*	

Exemple de SR : TD $y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$

Exemple de SNR : TD $y_n = y_{n-1} + x_n$

- Système causal

Système qui, à un instant donné, ne nécessite pas la connaissance du futur pour fournir sa réponse à cet instant

Exemple : Traitement d'une ligne d'image numérique :

Exemple de SC : TD $y_n = x_n + x_{n-1}$

x(n-1)	***x(n)***	*x(n+1)*	$\longrightarrow$

Exemple de SNC : TD $y_n = x_n + x_{n+1}$

x(n-1)	***x(n)***	*x(n+1)*	$\longleftarrow$

Système causal : **RI causale** ***t*** $\rightarrow$

Système non causal : **RI non causale** ***t*** $\leftarrow$

- *Système réalisable :*

Système causal

(un système non causal a tout de même une existence physique)

- *Système stable*

- A entrée bornée sortie bornée

- Système qui, perturbé, revient à son état initial après disparition de la perturbation

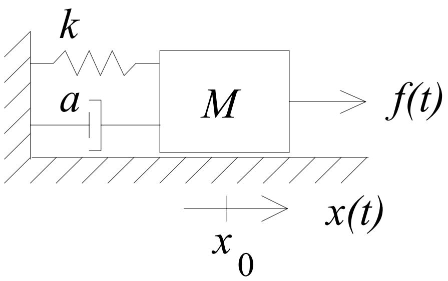
- *Système multivariable ($\neq$ monovariable) :*

Système comportant plusieurs entrées et sorties

Modélisation des systèmes

Exemple : Système mécanique

TC *Entrée : force f(t)* - *Sortie : position x(t)* % à x_0



k : coeff. de frottement élastique
a : coeff. de frottement visqueux

x_0 : position d'équilibre

Relation Fondamentale de la Dynamique :

$$\sum \text{forces} = M\gamma \quad \rightarrow \quad \boxed{f(t) - k\,x(t) - a\,\dot{x}(t) = M\,\ddot{x}(t)}$$