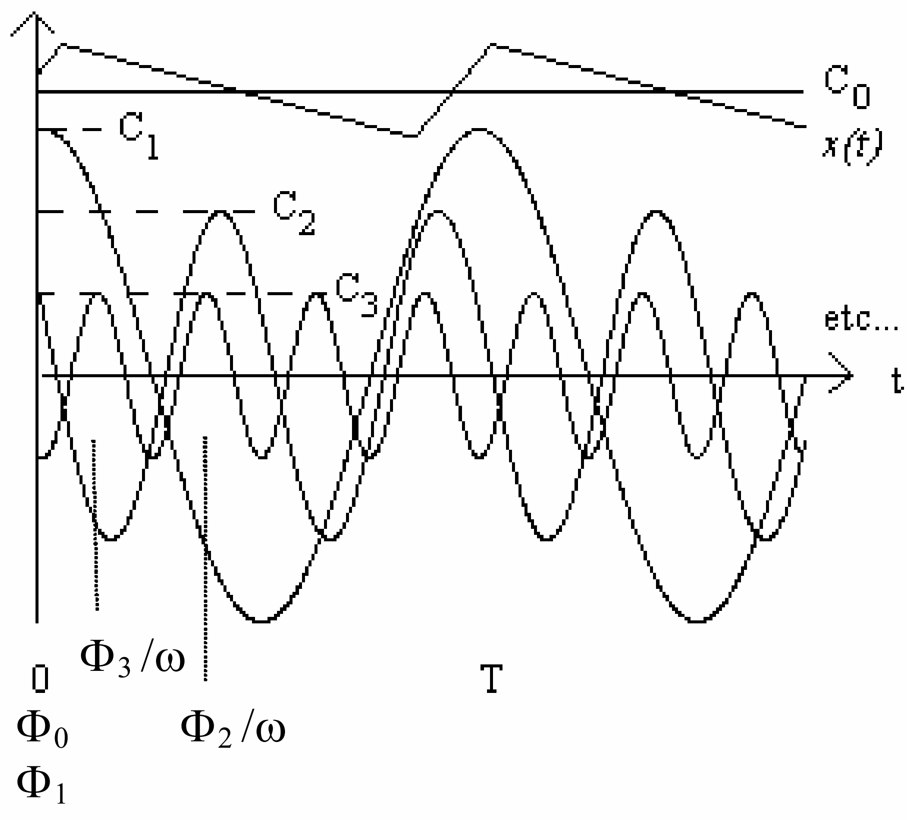
3. Représentations Fréquentielles des Signaux & des Systèmes à TC

SIGNAUX

RF d'un Signal Périodique (T) à TC : *série de Fourier*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(k\omega t + \Phi_k) \qquad (0) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Série de Fourier d'un signal périodique « triangulaire »



Autre forme $\quad x(t) = \dfrac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \qquad (1)$

Autre forme (Euler) *(Formule d'inversion)* $\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{ik\omega t}}$ (2)

$X_k \equiv X(k\nu)$, où $\nu = \dfrac{1}{T}$ est la fréquence, est la **RF** de *x(t)*

Passage direct : de la RT à la RF

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-ik\omega t}\,dt} \quad (4)$$

- *Propriétés :*

(1) Symétrie Hermitique :

si *x(t)* réel : $X_{-k} = \overline{X}_k$ $\qquad (\overline{X}_k \equiv \textit{conjugué de } X_k)$

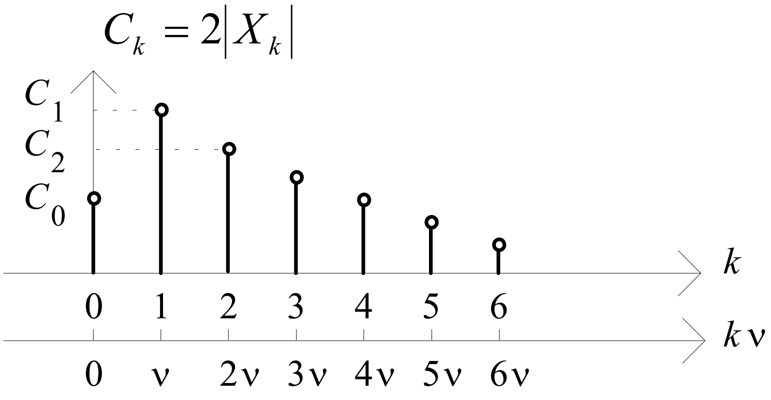
$\rightarrow$ Signal réel : $|X_k|$ est pair et Arg X_k est impair.

(2) X_k **= spectre de *x(t)*** ≡ DSP de *x(t)*

- *Spectre d'amplitude :* amplitude des composantes harmoniques de *x(t)*

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = 2|X_k|$$

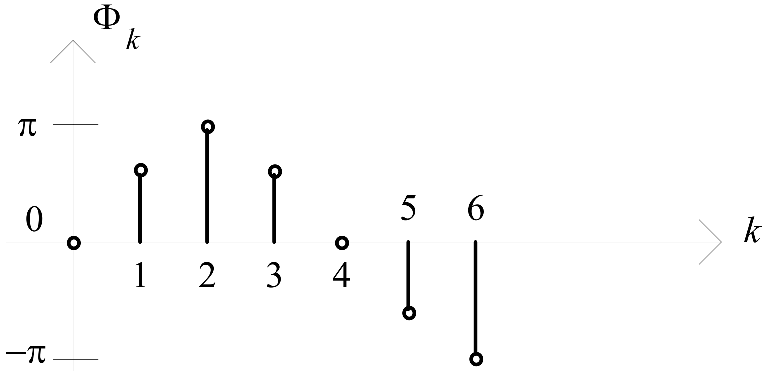
Exemple :



- *Spectre de phase :* décalage temporel des harmoniques de *x(t)*

$$\Phi_k = Arg(X_k)$$

Exemple :



(3) Le spectre d'un signal *x(t)* à TC, périodique de période T, est discret (≡ à fréquences discrètes) :

$$X_k \equiv X_k(k\nu) \equiv X\left(\frac{k}{T}\right)$$

(5) Puissance d'un signal périodique - Théorème de Parseval :

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \left|x(t)\right|^2 .dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|X_k\right|^2$$

La puissance temporelle est égale à la puissance spectrale.

(6) Parité :

- *Dictionnaire :* signaux temporels de période T ($\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $\nu = \dfrac{1}{T}$)

RT	RF
$u(t) = a\,x(t) + b\,y(t)$	$U_k = a\ X_k + b\ Y_k$
$y(t) = x(-t)$	$Y_k = X_{-k}$
$y(t) = x(t - \tau)$	$Y_k = X_k \cdot e^{-ik\omega\tau}$
$y(t) = x(t) + c$	$Y_k = X_k + c\delta_k \qquad \left(\ \delta_k \equiv \delta(k\nu)\ \right)$

RT	RF
$y(t) = \dot{x}(t)$	$Y_k = ik\omega \cdot X_k$
$y(t) = x^{(p)}(t)$	$Y_k = (ik\omega)^p \cdot X_k$
$y(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} x(u)du$	$Y_k = \dfrac{X_k}{ik\omega} \qquad (k \neq 0)$
$y(t) = \overline{x}(t)$	$Y_k = \overline{X}_{-k}$
$u(t) = x(t) * y(t)$	$U_k = X_k \cdot Y_k$
$u(t) = x(t)\ .\ y(t)$	$U_k = X_k * Y_k$

RF d'un signal non périodique à TC : *Transformation de Fourier*

$$\boxed{X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt}$$

ν : fréquence

$X(\nu)$ est la RF de *x(t)*, notée : $X(\nu)$ = TF (*x(t)*)

- *Formule d'inversion :* on a par Transformée de Fourier Inverse :

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \cdot e^{+i2\pi\nu t} d\nu}$$

noté : *x(t)* = TF-1($X(\nu)$)

- *Propriétés :*

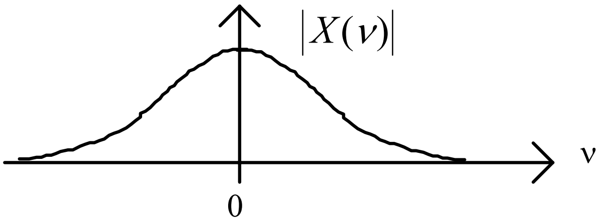
(1) Symétrie Hermitique :

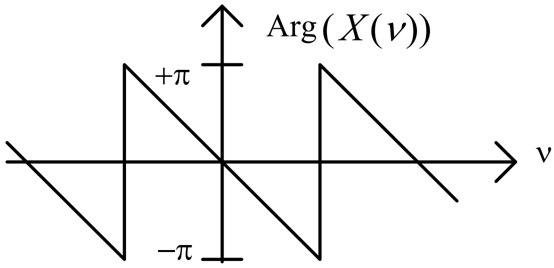
Pour un signal réel, on a : $|X(\nu)|$ pair et Arg $X(\nu)$ impair

(2) $X(\nu)$ représente le spectre de *x(t)* :

Spectre ≡ DSP ≡ TF (*x(t)*)

- Spectre d'amplitude : $|X(\nu)|$ - Spectre de phase : $\mathrm{Arg}(X(\nu))$





(3) Le spectre d'un signal non périodique à TC est continu (≡ à fréquences continues) $X(\nu)$

(5) Energie du signal - Théorème de Parseval :

$$E \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$

(6) Parité :

	PAIR		IMPAIR	
x(t)	Réel	Imaginaire pur	Réel	Imaginaire pur
$X(\nu)$	↓	↓	↙	↘

(10) Dualité (≡ Interchangeabilité des variables temporelle et fréquentielle) :

Si TF[*f(t)*] = *F*(ν) alors TF[*F(-t)*] = *f*(ν) ou encore TF[*F(t)*] = *f*(-ν)

$$\left| \begin{aligned} X(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t}\, dt \\ X(-\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{i2\pi\nu t}\, dt \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \cdot e^{i2\pi\nu t}\, d\nu \\ x(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \cdot e^{-i2\pi\nu t}\, d\nu \end{aligned} \right.$$

Exemple :

Le calcul de la TF d'une fenêtre donne :

$$\Pi_T(t) \xrightarrow{TF} T \cdot \frac{\sin(\pi \nu T)}{\pi \nu T} \stackrel{\Delta}{=} T \cdot \sin c(\pi \nu T)$$

d'où : $\sin c(-\pi\, tT) = \sin c(\pi\, tT) \xrightarrow{TF} \dfrac{1}{T}\Pi_T(\nu)$

- Dictionnaire :

RT	RF
$u(t) = a\, x(t) + b\, y(t)$	$U(\nu) = a\ X(\nu) + b\, Y(\nu)$
$y(t) = x(-t)$	$Y(\nu) = X(-\nu)$
$y(t) = x(t - \tau)$	$Y(\nu) = X(\nu) \cdot e^{-i2\pi\nu\tau}$
$y(t) = x(t) + c$	$Y(\nu) = X(\nu) + c\delta(\nu)$
$y(t) = \dot{x}(t)$	$Y(\nu) = i2\pi\nu \cdot X(\nu)$
$y(t) = x^{(p)}(t)$	$Y(\nu) = (i2\pi\nu)^p \cdot X(\nu)$
$y(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} x(u)du$	$Y(\nu) = \dfrac{X(\nu)}{i2\pi\nu} + k\delta(\nu)$ k : C^{te} d'intégration à déterminer
$y(t) = \overline{x}(t)$	$Y(\nu) = \overline{X}(\nu)$
$y(t) = x(t / \lambda)$	$Y(\nu) = \lvert\lambda\rvert\ X(\lambda\nu)$
$y(t) = t \,.\, x(t)$	$Y(\nu) = -\dfrac{1}{i2\pi\nu}\dfrac{dX(\nu)}{d\nu}$
$y(t) = t^p x(t)$	$Y(\nu) = -\left(\dfrac{1}{i2\pi\nu}\right)\dfrac{d^p X(\nu)}{d\nu^p}$

RT	**RF**
$u(t) = x(t) * y(t)$	$U(\nu) = X(\nu) \cdot Y(\nu)$
$u(t) = x(-t) * y(t)$	$U(\nu) = X(-\nu) \cdot Y(\nu)$
$u(t) = x(t) \,.\, y(t)$	$U(\nu) = X(\nu) * Y(\nu)$
$y(t) = e^{i2\pi\nu_0\tau} \cdot x(t)$	$Y(\nu) = X(\nu - \nu_0)$

- Table de Transformées des signaux usuels :

RT	**RF**
$x(t) = \delta(t)$	$X(\nu) = 1$
$x(t) = 1$	$X(\nu) = \delta(\nu)$
$x(t) = e^{i2\pi\nu_0 t}$	$X(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$
$x(t) = \vert\_\vert\_\vert_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$X(\nu) = F \vert\_\vert\_\vert_F(\nu)$ $(F = 1/T)$
$x(t) = \sin c(\pi t T)$ avec $\sin c(x) \overset{\Delta}{=} \frac{\sin x}{x}$	$X(\nu) = \frac{1}{T}\Pi_T(\nu)$
$x(t) = \Pi_T(t)$	$X(\nu) = T \cdot \sin c(\pi\nu T)$
$x(t) = \Gamma(t)$	$X(\nu) = \frac{1}{i2\pi\nu} + \frac{\delta(\nu)}{2}$
$x(t) = e^{-\pi t^2}$	$X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$

RF de Laplace des Signaux à TC : *Transformation de Laplace*

$$\boxed{X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt}$$

p : variable de Laplace (notée aussi s)

L 'ensemble des valeurs de p tel que cette intégrale converge est le domaine de convergence de $X(p)$

TL monolatérale (TL+) : $X^+(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt$.

Elle s'utilise pour les signaux *x(t)* causaux

- *Formule d'inversion :*

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{i2\pi} \int_C X(p) \cdot e^{pt} dp}$$

avec :

C : Contour d'intégration dans la Bande de convergence (domaine de définition) de $X(p)$

En pratique :

Tables des transformées + décomposition en éléments simples

- *Propriétés :*

(1) TF et TL :

Si l'axe imaginaire (axe Re(p) = 0) est inclus dans la Bande de Convergence de la TL, on a la relation de passage entre TF et TL :

$$X(\nu) = X(p = i2\pi\nu) \qquad \leftrightarrow \qquad p = i2\pi\nu$$

(5) Théorème de la valeur initiale (TL monolatérale) :

$$x(t = 0^+) = \lim_{p \to +\infty} pX(p)$$

(6) Théorème de la valeur finale :

$$x(t = +\infty) = \lim_{p \to 0} pX(p)$$

à condition que $X(p)$ n'ait aucun pôle à partie réelle > 0.

- *Dictionnaire :*

RT	**RF**
$u(t) = a\,x(t) + b\,y(t)$	$U(p) = a\,X(p) + b\,Y(p)$
$y(t) = x(t - \tau)$	$Y(p) = e^{-\tau p} \cdot X(p)$
$y(t) = \dot{x}(t)$	$TL^+\left[y(t)\right] = Y^+(p) = pX(p) - x(0^+)$
$y(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} x(u)du$	$Y(p) = \dfrac{X(p)}{p}$

RT	RF
$y^{(n)}(t) = x(t)$	$Y(p) = \dfrac{X(p)}{p^n}$
$u(t) = x(t) * y(t)$	$U(p) = X(p) \cdot Y(p)$
$u(t) = x(-t) * y(t)$	$U(p) = X(-p) \cdot Y(p)$
$u(t) = x(t) \, . \, y(t)$	$U(p) = X(p) * Y(p)$
$y(t) = t \, . \, x(t)$	$Y(p) = -\dfrac{dX(p)}{dp}$
$y(t) = t^n \, . \, x(t)$	$Y(p) = (-1)^n \dfrac{dX(p)}{dp^n}$
$y(t) = e^{-at} \cdot x(t)$	$Y(p) = X(p+a)$
$y(t) = x(-t)$	$Y(p) = X(-p)$

- Table de Transformées des signaux usuels :

RT	RF
$x(t) = \Gamma(t)$	$X(p) = \dfrac{1}{p}$
$x(t) = \delta(t)$	$X(p) = 1$
$x(t) = 1$	$X(p) = \delta(p)$
$x(t) = e^{-at} . \Gamma(t)$	$X(p) = \dfrac{1}{p+a}$

RT	RF
$x(t) = t^n.\Gamma(t)$	$X(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$x(t) = \sin\omega_0 t.\Gamma(t)$	$X(p) = \dfrac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$x(t) = \cos\omega_0 t.\Gamma(t)$	$X(p) = \dfrac{p}{p^2 + \omega_0^2}$

RF des Signaux non stationnaires à TC : *Ondelettes - TWV*

$$TWV\left[x(t)\right] \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\cdot x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\cdot e^{-i2\pi\nu\tau}\, d\tau = X(\nu,t)$$

(x^* = conjugué de x)

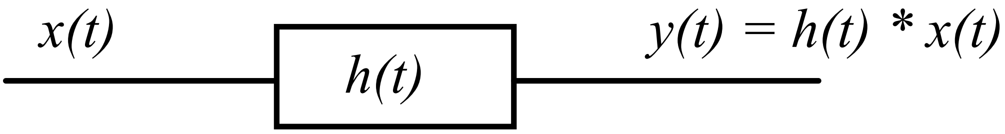
Le résultat, fonction de ν et *t*, autorise une analyse dans l'espace **Temps-Fréquence**.

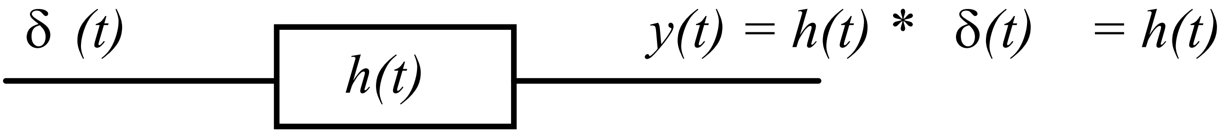
Application : Analyse fréquentielle du transitoire.

SYSTEMES

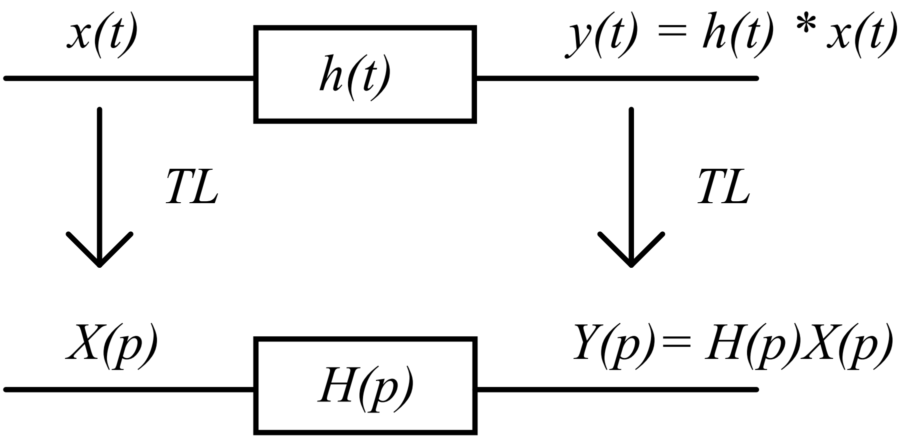
Représentation de Laplace : *Fonction de Transfert*

On a vu qu'un SLTI est caractérisé, dans le domaine temps, par sa Réponse Impulsionnelle h(t) :





Si on prend la TL des signaux précédents on a :



avec : $$\boxed{H(p) = TL\left[h(t)\right]}$$

$H(p)$ s'appelle la **Fonction de Transfert** (FT) du SLTI :

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}}$$ (si CIs nulles)

- Dualité Temps-Fréquence :

Temps		**Fréquence**
- RI : *h(t)*	$\Leftrightarrow$	- FT : *H(p)*
- SLTI	$\Leftrightarrow$	- Filtre linéaire
- STI	$\Leftrightarrow$	- Filtre
- Relation Entrée-Sortie : Convolution	$\Leftrightarrow$	- Relation Entrée-Sortie : Produit
- Relation Entrée-Sortie d'un SLTI : Equation différentielle linéaire à coeff constants :	$\Leftrightarrow$	- *H(p)* : fraction rationnelle en *p*
$\sum_{i=0}^{n} b_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{(i)}(t)$	$\overset{TL}{\rightarrow}$	$H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{\sum_{i=0}^{m} a_i p^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i p^i}$

Représentation de Fourier : ***Fonction de Transfert (Gain complexe)***

On a les mêmes propriétés qu'en Laplace :

$\boxed{H(\nu) = TF\left[h(t)\right]}$: FT du filtre linéaire

$H(\nu) = \dfrac{Y(\nu)}{X(\nu)}$ où $X(\nu) =$ TF[$x(t)$] et $Y(\nu) =$ TF[$y(t)$]

Stabilité d'un Système à TC

- Temps :

La définition : **« à entrée bornée, sortie bornée »** donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour un SLTI :

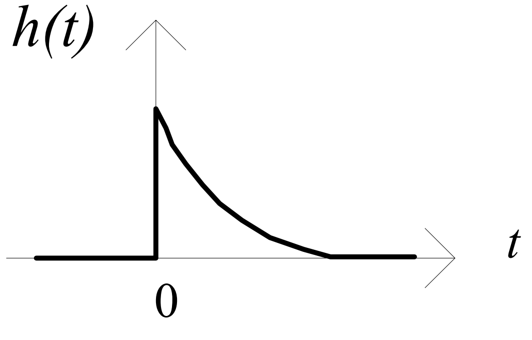
(cf. démonstration pour les systèmes à TD)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty}$$

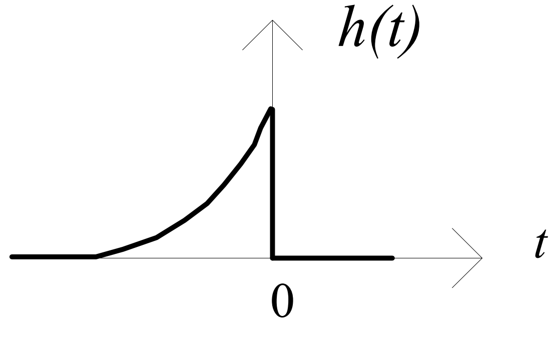
$\rightarrow \quad \lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 0$ (système causal stable)

$\rightarrow \quad \lim\limits_{t \to -\infty} h(t) = 0$ (système non causal stable)

Système causal stable



Système non causal stable



- Fréquence :

Traduite en fréquence, cette CNS devient :

Un système causal est stable si et seulement si tous les pôles de la FT *H(p)* de ce système ont une partie réelle négative
(le cas *partie réelle = 0* est un cas limite).

(Pour un système anticausal (≡ système de RI nulle pour $t > 0$), la CNS de stabilité serait que les pôles de *H(p)* soient à partie réelle positive).

Démonstration du critère fréquentiel de stabilité :

Soit un système causal de FT *H(p)* où *H(p)* est une fraction rationnelle.

H(p) peut être décomposé (en éléments simples) sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{A_1}{p - a_1} + \frac{A_2}{p - a_2} + \cdots = \sum_i \frac{A_i}{p - a_i}$$

H(p) apparaît comme la somme de sous-systèmes du 1er ordre.

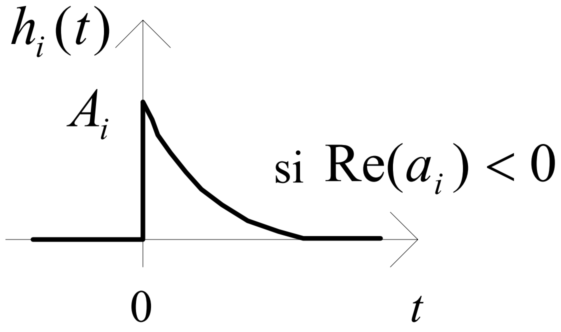
H(p) est stable si chaque sous-système $\dfrac{A_i}{p - a_i}$ est stable.

Un système est stable si, après perturbation, il revient à son état précédent.

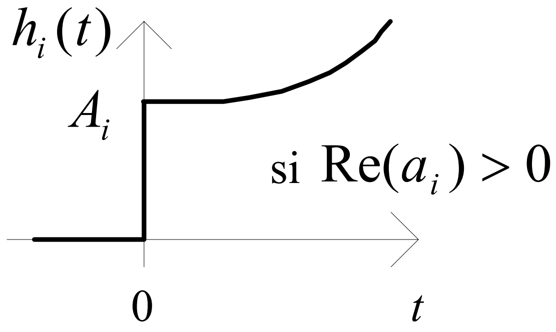
Prenons $\delta(t)$ comme perturbation et calculons la RI $h_i(t)$ (appelée *mode*) d'un sous-système $\dfrac{A_i}{p-a_i}$ initialement au repos :

$$h_i(t) = TL^{-1}\left[\frac{A_i}{p-a_i}\right] = A_i e^{a_i t}\Gamma(t) \quad :$$

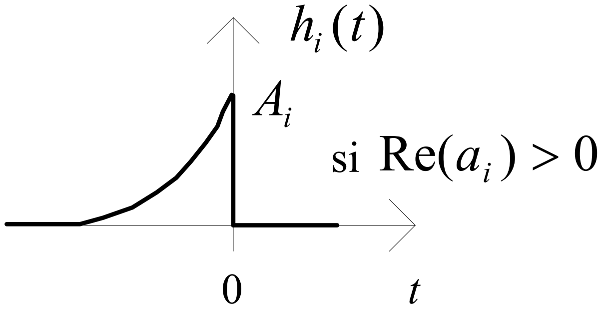
Système causal stable



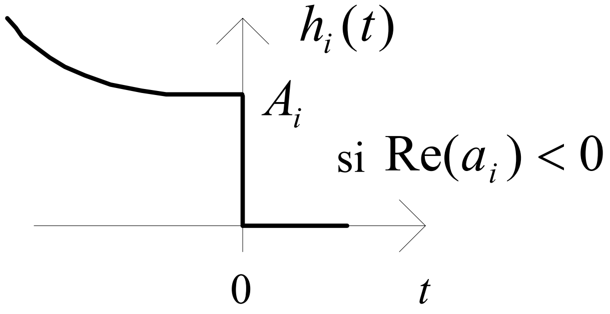
Système causal instable



Système non causal stable



Système non causal instable



Réponse Fréquentielle d'un Système à TC

On l'appelle aussi *Réponse en Fréquence* ou *Réponse Harmonique*

On la note $H(\nu)$: $\boxed{H(\nu) = TF\left[h(t)\right]}$ $h(t)$: RI

Système à TC à phase linéaire

Phase : $\varphi \stackrel{\Delta}{=} Arg\left[H(\nu)\right] = Arg\left[H(p = i2\pi\,\nu)\right]$

Un système de FT $H(\nu)$ est à **phase linéaire** si :

$$\varphi = Arg\left[H(\nu)\right] = \theta\,\nu \qquad \text{avec} \quad \theta = C^{te}$$

Un filtre à phase linéaire a pour propriété de retarder tous les signaux d'un même retard quelquesoit leur fréquence :

$$x_1(t) = A\sin(2\pi\nu_1 t) \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow y_1(t) = A_1'\sin(2\pi\nu_1 t - \varphi_1) = A_1'\sin[2\pi\nu_1(t - \tau_1)]$$

$$x_2(t) = A\sin(2\pi\nu_2 t) \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow y_2(t) = A_2'\sin(2\pi\nu_2 t - \varphi_2) = A_2'\sin[2\pi\nu_2(t - \tau_2)]$$

Si le filtre est à phase linéaire : $\varphi_1 = \theta\nu_1$ et $\varphi_2 = \theta\nu_2$ d'où :

$$y_1(t) = A_1'\sin(2\pi\nu_1 t - \theta\nu_1) = A_1'\sin[2\pi\nu_1(t - \theta)]$$

$$y_2(t) = A_2'\sin(2\pi\nu_2 t - \theta\nu_2) = A_2'\sin[2\pi\nu_2(t - \theta)]$$

Les 2 signaux de fréquence ν_1 et ν_2 sont retardés du même temps θ

Système à TC à phase minimale (≡ à déphasage minimal)

Un système de FT *H(p)* est à phase minimale si tous les **zéros** de *H(p)* sont à **partie réelle négative** pour un système causal.

Les systèmes physiques étant généralement à retard de phase (phase < 0) (temps de calcul du filtre), un déphasage φ minimal indique un retard τ minimal engendré par le filtre.

Déphasage minimal ≡ retard minimal

Soit le système $H(p) = \dfrac{1}{(1+p)^2}$ de phase φ **(<0)**

Ex. de système à phase ***non minimale*** *:* $H_1(p) = \dfrac{Y_1(p)}{U(p)} = \dfrac{1-p}{(1+p)^2}$

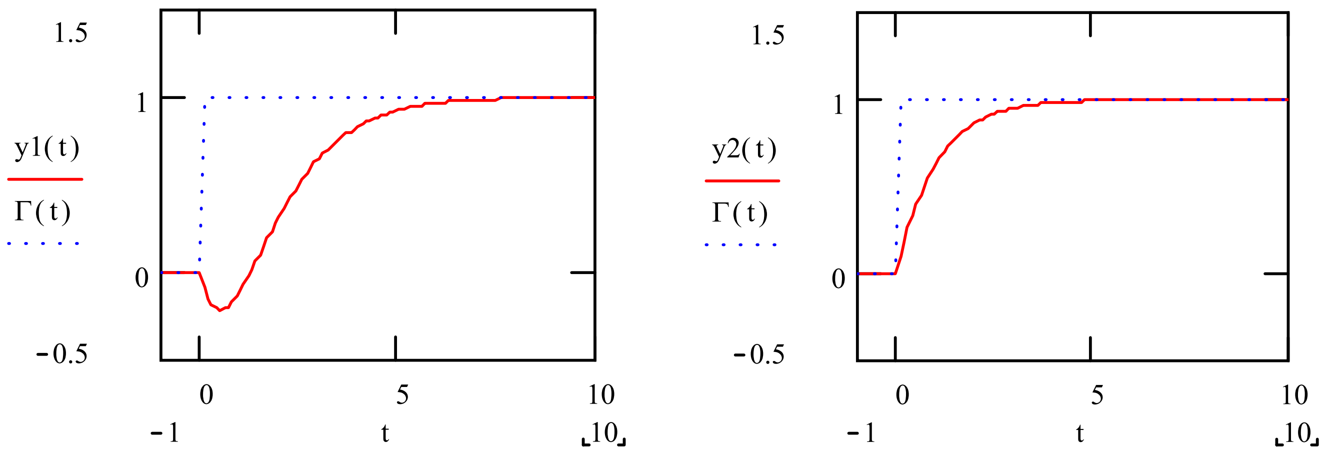
à comparer au système à phase ***minimale*** *:* $H_2(p) = \dfrac{Y_2(p)}{U(p)} = \dfrac{1+p}{(1+p)^2}$

Phase de $H_1(p)$: $\varphi_1 = \varphi + Arg[1-p]$ ($\varphi < 0$, $Arg[1-p] < 0$)

Phase de $H_2(p)$: $\varphi_2 = \varphi + Arg[1+p]$ ($\varphi < 0$, $Arg[1+p] > 0$)

$$\rightarrow \quad |\varphi_2| < |\varphi_1|$$

Réponse indicielle : *(entrée :* $u(t) = \Gamma(t)$ *)*



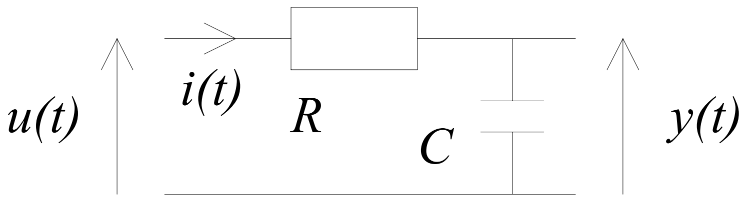
Pour le système à phase non minimale, la réponse démarre en sens inverse.

RF de Laplace et Fourier de Systèmes à TC modélisés

SYSTEMES PHYSIQUES

Systèmes électriques

Circuit RC à TC *Entrée : tension u(t) - Sortie : tension y(t)*



Lois de Kirschoff $\begin{cases} u(t) - y(t) = Ri(t) \\ i(t) = C\dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases} \rightarrow RC\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$ (1)

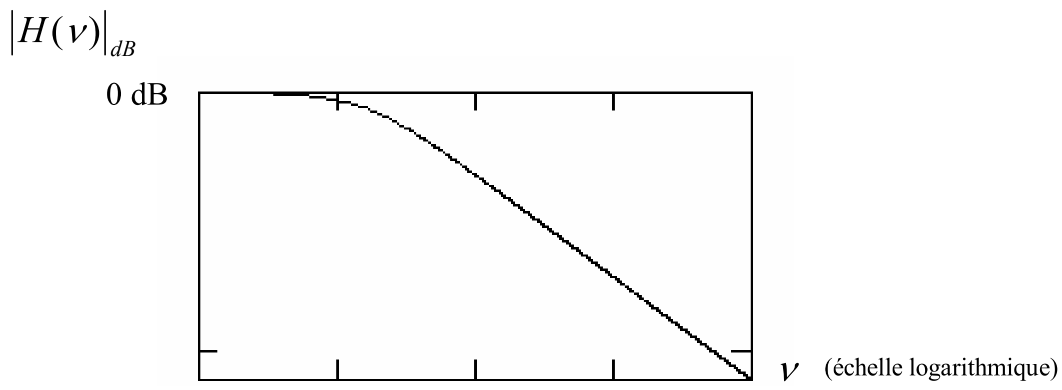
Supposons le Condensateur C initialement déchargé (CI nulles)

TL(1) : $RCpY(p) + Y(p) = U(p) \rightarrow \boxed{H(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)} = \dfrac{1}{1+RCp}}$

Réponse fréquentielle $$H(\nu) = \frac{1}{1+i2\pi\nu RC}$$

$$|H(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi\nu RC)^2}} \qquad\qquad |H(\nu)|_{dB} = 20\log|H(\nu)|$$

$$Arg[H(\nu)] = -Arctg(2\pi\nu RC)$$



Système du **1er ordre** et de nature **passe-bas**

(élimination des composantes de $u(t)$ de fréquence > $\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi RC}$)
