# 4. Représentations Fréquentielles des Signaux & Systèmes à TD

## SIGNAUX

## RF de Fourier d'un Signal à TD : *TFD*

$$X(\nu) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-i2\pi\nu nT}$$

***TFDI :***

$$x(nT) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(\nu) \cdot e^{i2\pi\nu nT}\, d\nu$$

Le spectre $X(\nu)$ d'un signal à TD $x(nT)$ est : . continu
. périodique

## RF de Laplace des Signaux à TD : *TLD*

*Rappel (TL d'un signal à TC)*

$$TL[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

$$TL^*\left[x(nT)\right] \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}$$

$$TL^*\left[x(n)\right] \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-pn}$$

# RF z des Signaux à TD : *Transformation en z*

On pose : $\boxed{z = e^{pT}}$ dans la TLD pour un signal *x(nT)*

ou : $z = e^{p}$ pour un signal *x(n)*

$$\boxed{TL^*\left[x(nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n} \overset{\Delta}{=} TZ[x(nT)]} = \mathrm{X(z)}$$

et : $$TL^*\left[x(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \overset{\Delta}{=} TZ[x(n)] = \mathrm{X(z)}$$

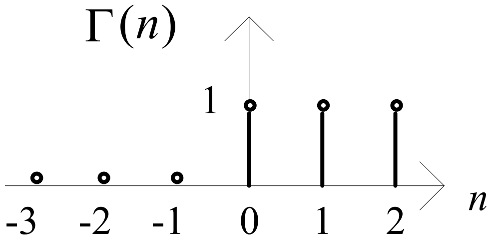
*Signaux causaux*

$TZ$ monolatérale ( $TZ^+$ ) : $$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

*TL et TZ*

$$\begin{tikzcd} X(p) \arrow[r, "TL^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "Z"'] & x(t) \arrow[r, dash, "\text{Echantillonnage}"] & x(nT) \arrow[r, "TZ"] & X(z) \end{tikzcd}$$

*Convergence* *Exemple :*



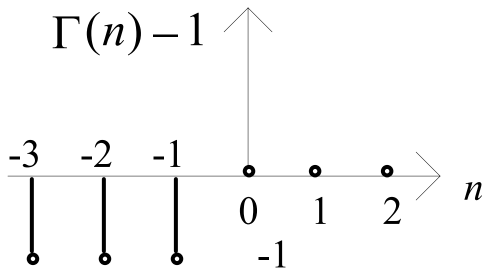

*Echelon causal*

$$TZ[\Gamma(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-n} + \ldots =$$

série géométrique de raison $q = z^{-1}$

$$TZ[\Gamma(n)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad si \quad \left|z^{-1}\right| < 1$$

$$\rightarrow \qquad TZ[\Gamma(n)] = \frac{z}{z-1} \quad si \quad |z| > 1$$




*Echelon anticausal*

$$TZ\big[\Gamma(n-1)\big] = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = -z\left(1 + z + z^2 + \cdots\right)$$

$$TZ\big[\Gamma(n-1)\big] = -z\,\frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1} \quad \text{si} \quad |z| < 1$$

*Convergence*

. séquence causale :

série entière en *1/z*

CVG dans un anneau $|z| > R_1$ : série de Laurent

. séquence anticausale :

série entière en *z*

CVG dans un disque $|z| < R_2$ : série de Taylor

## Dictionnaire

| Opération | RT | RF *z* |
|---|---|---|
| 1. Comb. lin. | *u(n)=ax(n)+by(n)* | $U(z) = a\ X(z) + b\ Y(z)$ |
| 2. Translation temporelle | *y(n) = x(n-k)* | $Y(z) = z^{-k} X(z)$ |
| 3. Retard (*k*>0) ( $X^+(z)$ ) | *y(n) = x(n-k)*<br>$k = 1$: | $Y^+(z) = z^{-k} X^+(z) + \sum_{m=0}^{k-1} x(m-k) z^{-m}$<br>$Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n-1)] = z^{-1} X^+(z) + x(-1)$ |
| 4. Avance (*k*>0) ( $X^+(z)$ ) | *y(n) = x(n+k)*<br>$k = 1$: | $Y^+(z) = z^k X^+(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(m) z^{k-m}$<br>$Y^+(z) = TZ^+[y(n) = x(n+1)] = zX^+(z) - zx(0)$ |
| 7. Convolution | *u(n) = x(n)*y(n)* | $U(z) = X(z) Y(z)$ |
| 8. Produit | *u(n) = x(n).y(n)* | $U(z) = X(z) * Y(z)$ |

# Inversion de la *TZ* $X(z)$ d'une séquence *x(n)* :

## *(1) Inversion par utilisation directe des tables après une éventuelle décomposition en éléments simples*

Les tables étant généralement faites pour des fonctions causales, cette méthode n'est utilisable **directement** que si on recherche une séquence causale.

## *(2) Inversion par décomposition en série de Taylor ou de Laurent*

. *x(n)* causal $\leftrightarrow$ CVG de $X(z)$ : $|z| > R_1$ $\leftrightarrow$ Laurent

. *x(n)* non causal $\leftrightarrow$ CVG de $X(z)$ : $|z| < R_2$ $\leftrightarrow$ Taylor

*Exemple :* $$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

. Séquence causale $\rightarrow$ $X(z)$ en série de Laurent :

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = TZ[\Gamma(n)]$$

car identification à $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$ (CVG pour $|z| > 1$ )

. Séquence non causale $\rightarrow$ $X(z)$ en série de Taylor :

$$X(z) = -z \cdot \frac{1}{1-z} = -z(1 + z + z^2 + \ldots) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = TZ[\Gamma(n) - 1]$$

(CVG pour $|z| < 1$)

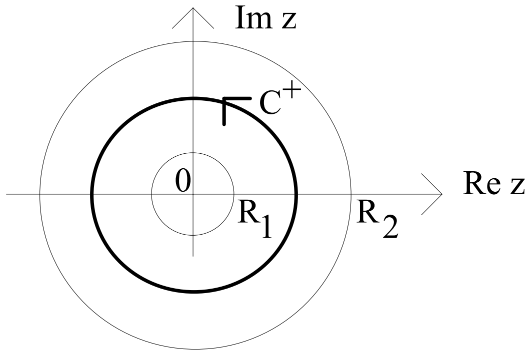
## *(3) Inversion par la méthode des Résidus*

$$\boxed{x(n) = \sum_{p_i} \text{Residus de } z^{n-1} X(z)}$$

avec :

$p_i$ : pôles de $z^{n-1} \cdot X(z)$ intérieurs à $C^+$.

$C^+$ : cercle quelconque de centre 0 parcouru dans le sens trigonométrique et $\subset$ anneau de convergence de $X(z)$




## *(4) Inversion par division de polynômes suivant les puissances croissantes de $z^{-1}$*

*dans le cas d'une convergence du type* $|z| > R_1$ *(≡ séquence causale)*

*(Si séquence anticausale, division en puissances croissantes de z)*

*Exemple :* $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$

Séquence causale :

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = TZ[\Gamma(n)]$$

(CVG pour $|z| > 1$ )

Séquence non causale :

$$X(z) = -\frac{z}{1-z} = -(z + z^2 + z^3 + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = TZ[\Gamma(n) - 1]$$

(CVG pour $|z| < 1$ )

## *(5) Inversion par équation aux différences*

$$\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i \ z^{-i}}{\sum_{i=0}^{k} b_i \ z^{-i}}$$

Produit croisé :

$$X(z) \cdot \sum_{i=0}^{k} b_i \ z^{-i} = U(z) \cdot \sum_{i=0}^{m} a_i \ z^{-i} \xrightarrow{TZ^{-1}} \sum_{i=0}^{k} b_i x(n-i) = \sum_{i=0}^{m} a_i u(n-i)$$

## **Propriétés de la TZ :**

*(1) TL et TZ* : $\boxed{z = e^{p}}$ $\boxed{z = e^{pT}}$

TL (discrète) d'une séquence $x(n)$ (resp. $x(nT)$) :

$X(p) = X(z = e^{p})$ (resp. $X(p) = X(z = e^{pT})$)

*(2) TF et TZ* : $\boxed{z = e^{i2\pi\nu}}$ $\boxed{z = e^{i2\pi\nu T}}$

TF (discrète) d'une séquence $x(n)$ (resp. $x(nT)$) :

$X(\nu) = X(z = e^{i2\pi\nu})$ (resp. $X(\nu) = X(z = e^{i2\pi\nu T})$)

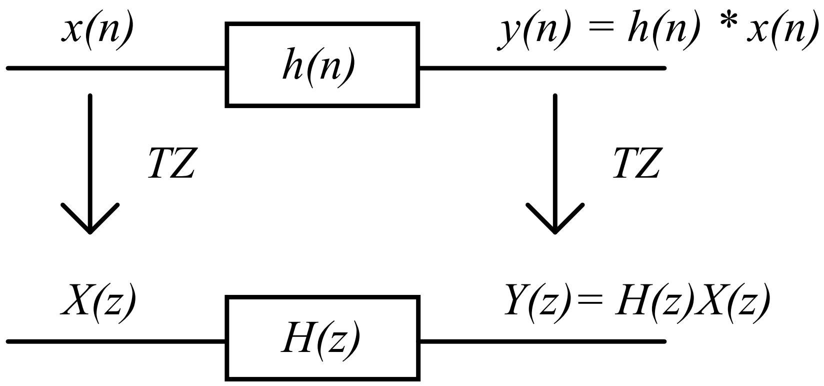
# TABLE DES TRANSFORMEES EN Z ET DE LAPLACE

# (FONCTIONS CAUSALES)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X(s) \xleftarrow{TL}$ | $x(t)$ | $x(kT)$ ou $x(k)$ | $\xrightarrow{TZ} X(z)$ |

# SYSTEMES

## RF z des Systèmes à TD : *Fonction de Transfert*




si CI nulles

si CI nulles

## FT du SLTI

$$\boxed{H(z) = TZ[h(n)]}$$ (ou : $H(z) = TZ[h(nT)]$ )

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

*- Dualité Temps-Fréquence :*

| Temps | | Fréquence |
|---|---|---|
| - RI : *h(n)* | $\Leftrightarrow$ | - FT : *H(z)* |
| - SLTI | $\Leftrightarrow$ | - Filtre linéaire |
| - STI | $\Leftrightarrow$ | - Filtre |
| - Relation Entrée-Sortie : Convolution | $\Leftrightarrow$ | - Relation Entrée-Sortie : Produit |
| - Relation Entrée-Sortie d'un SLTI Equation aux différences linéaire à coeff constants | $\Leftrightarrow$ | - *H(z)* fraction rationnelle en *z* |
| $\sum_{i=0}^{p} b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{m} a_i x(n-i)$ | $\xrightarrow{TZ}$ | $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}$ |

**Stabilité d'un Système (SLTI) à TD**

*- Temps : EBSB*

« A entrée bornée, sortie bornée » $\rightarrow$ CNS de stabilité :

$$\textit{Système stable} \Leftrightarrow \textit{EBSB} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

*Démonstration de la CNS :* $\quad EBSB \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \qquad (1)$

*Condition suffisante :* $\quad EBSB \quad \Leftarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

Si (1) est vraie alors *x(n)* bornée $\Rightarrow$ *y(n)* bornée

$$|x(n)| < N \quad \Rightarrow$$

*Condition nécessaire :* $\quad EBSB \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

(Rappel : $a \Rightarrow b$ équivaut à $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$ )

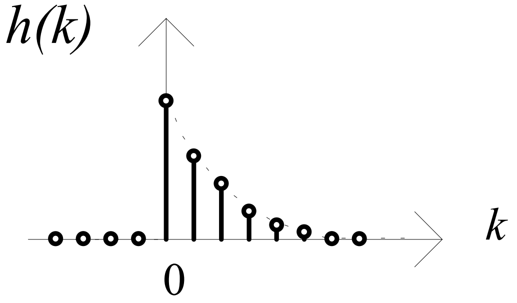
Si (1) fausse $\exists \; x(n)$ bornée qui provoque $y(n) = \infty$ :

(1) fausse : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \infty$ . Soit $x(n) = \left| \begin{array}{ll} +1 & si\ h(-n) > 0 \\ -1 & si\ h(-n) < 0 \\ 0 & si\ h(-n) = 0 \end{array} \right.$ bornée

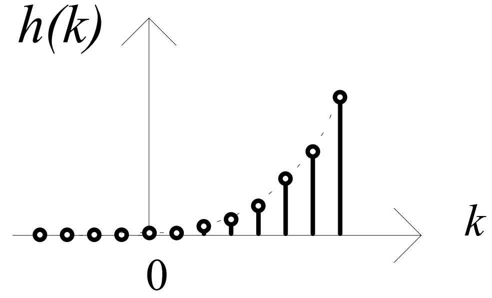
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(-k) \rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \infty$$

*Exemples :*

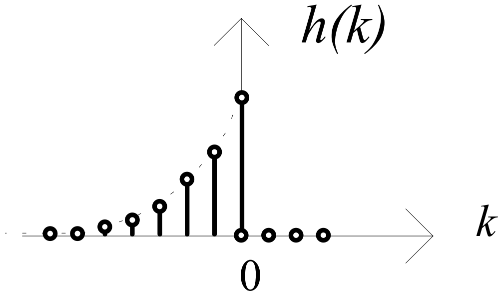
*Système causal stable*



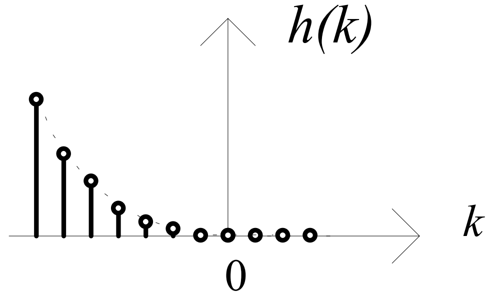

*Système causal instable*




*Système non causal stable*




*Système non causal instable*




- *Fréquence :*

Traduite en fréquence, cette CNS devient :

**Pour qu'un système de FT *H(z)* soit stable, une CNS est que tous les pôles de *H(z)* aient un module inférieur à 1, pour un système causal**

Pour un système anticausal (≡ système de RI nulle pour $n > 0$), la CNS de stabilité serait que les pôles de *H(z)* soient à module supérieur à 1.

## Réponse Fréquentielle d'un Système à TD

$\equiv$ Réponse Harmonique, Réponse en Fréquence

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) = H(z)X(z)$$

si CI nulles

La RF d'un système à TD s'obtient en faisant $z = e^{pT}$ ou $z = e^{p}$ selon que $x = x(nT)$ ou $x(n)$.

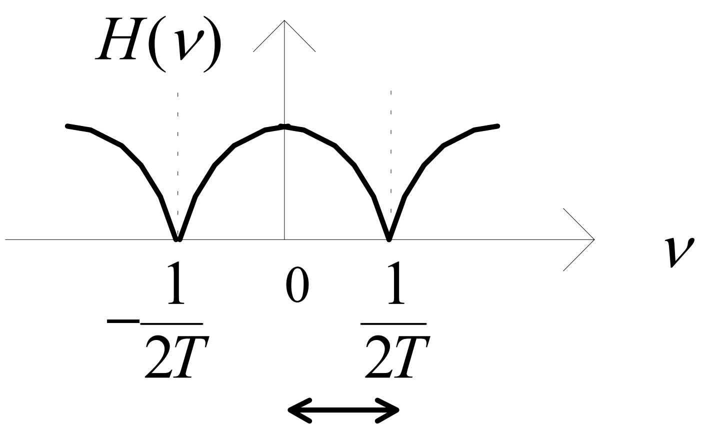
On la note $H(\nu)$ car $p = i2\pi\nu$ en régime harmonique :

$$\boxed{H(\nu) = H(z = e^{pT}) = H(e^{i2\pi\nu T})} \qquad (1) \qquad \text{pour } x(nT)$$

$$\boxed{H(\nu) = H(z = e^{p}) = H(e^{i2\pi\nu})} \qquad (2) \qquad \text{pour } x(n)$$

$H(\nu)$ est **périodique**, de période $\nu = \dfrac{1}{T}$ (1) ou $\nu = 1$ (2)

*Interprétation : exemple filtre passe-bas :*



# Système à TD à phase linéaire

Phase : $\varphi \stackrel{\Delta}{=} Arg\left[H(\nu)\right] = Arg\left[H(z=e^{i2\pi\nu T})\right]$ pour *x(nT)*

ou $Arg\left[H(z=e^{i2\pi\nu})\right]$ pour *x(n)*

Un système de FT *H*(*z*) est à phase linéaire si :

$$\varphi = Arg\left[H(\nu)\right] = \theta\,\nu \quad \text{avec } \theta = \mathrm{C^{te}}.$$

Un filtre à phase linéaire a pour propriété de retarder tous les signaux d'un même retard quelquesoit leur fréquence :

$$x_1(kT) = A\sin(2\pi\nu_1 kT) \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow y_1(kT) = A_1'\sin(2\pi\nu_1 kT - \varphi_1) = A_1'\sin[2\pi\nu_1(k-n_1)T]$$

$$x_2(kT) = A\sin(2\pi\nu_2 kT) \longrightarrow \boxed{\Phi} \longrightarrow y_2(kT) = A_2'\sin(2\pi\nu_2 kT - \varphi_2) = A_2'\sin[2\pi\nu_2(k-n_2)T]$$

Si le filtre est à phase linéaire : $\varphi_1 = \theta\nu_1$ et $\varphi_2 = \theta\nu_2$ :

$$y_1(kT) = A_1'\sin(2\pi\nu_1 kT - \theta\nu_1) = A_1'\sin[2\pi\nu_1(kT-\theta)]$$

$$y_2(kT) = A_2'\sin(2\pi\nu_2 kT - \theta\nu_2) = A_2'\sin[2\pi\nu_2(kT-\theta)]$$

Les 2 signaux de fréquence $\nu_1$ et $\nu_2$ sont retardés du même temps $\theta$

## Système à TD à phase minimale

*Rappel :* **Système à TC à phase minimale**

Un système de FT *H(p)* est à phase minimale si tous les **zéros** de *H(p)* sont à **partie réelle négative** pour un système causal.

Les systèmes physiques étant généralement à retard de phase (phase < 0) (temps de calcul du filtre), un déphasage $\varphi$ minimal indique un retard $\tau$ minimal engendré par le filtre.

*Déphasage minimal ≡ retard minimal*

*Soit le système* $H(p) = \dfrac{1}{(1+p)^2}$ de phase $\varphi$ **(<0)**

*Ex. de système à phase* ***non minimale*** *:* $H_1(p) = \dfrac{Y_1(p)}{U(p)} = \dfrac{1-p}{(1+p)^2}$

*à comparer au système à phase* ***minimale*** *:* $H_2(p) = \dfrac{Y_2(p)}{U(p)} = \dfrac{1+p}{(1+p)^2}$

*Phase de* $H_1(p)$ : $\varphi_1 = \varphi + Arg[1-p]$ ($\varphi < 0$, $Arg[1-p] < 0$)

*Phase de* $H_2(p)$ : $\varphi_2 = \varphi + Arg[1+p]$ ($\varphi < 0$, $Arg[1+p] > 0$)

$$\rightarrow \quad |\varphi_2| < |\varphi_1|$$

## Système à TD à phase minimale

Un système de FT *H(z)* est dit à phase minimale si tous les zéros de *H(z)* ont un module inférieur à 1, pour un système causal.

*Déphasage minimal ≡ retard minimal*

Un zéro de module > 1 de la FT $H(z)$ d'un filtre linéaire (encore appelé abusivement zéro « instable » par analogie avec le critère de stabilité) provoque un retard (≡ un déphasage) supplémentaire lors de la traversée du filtre :

Soit $H(z)$ un système comportant un zéro « instable » :

$$H(z) = (z - z_0)G(z)$$

On a vu pour un système causal à TC, qu'un zéro « instable » (≡ $\mathrm{Re}(p_0) > 0$) accroît le déphasage de la FT:

$$H(p) = (p - p_0)G(p)$$

Du fait de la relation de passage TC → TD : $z = e^{pT}$ (pour $x(nT)$), on a :

$$p_0 = a + jb \quad \rightarrow \quad z_0 = \underbrace{e^{aT}}_{\text{module}}.\underbrace{e^{jbT}}_{\text{phase}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(p_0) > 0 \quad \rightarrow \quad a > 0 \quad \rightarrow \quad |z_0| = e^{aT} > 1$$

Un zéro « instable » accroît le déphasage et inflige donc un retard supplémentaire au temps de calcul du filtre.

# Représentations Fréquentielles z de Systèmes à TD modélisés

## SYSTEMES ECONOMIQUES

### *Caisse d'épargne à TD*

*Entrée: investissement mensuel u(k) - Sortie: capital fructifié mensuel y(k)*

$I$ : Taux d'intérêt mensuel

$$y(k) = y(k-1) + Iy(k-1) + u(k)$$

$$\begin{cases} y(k) = (1+I)y(k-1) + u(k) & (1) \\ CI \quad y(-1) \qquad u(k<0) = 0 & \big(u(k) \text{ causal}\big) \end{cases}$$

Avec un capital initial nul : $y(-1) = 0$ (CI nulles)

TZ(1) : $Y(z) = (1+I)z^{-1}Y(z) + U(z)$

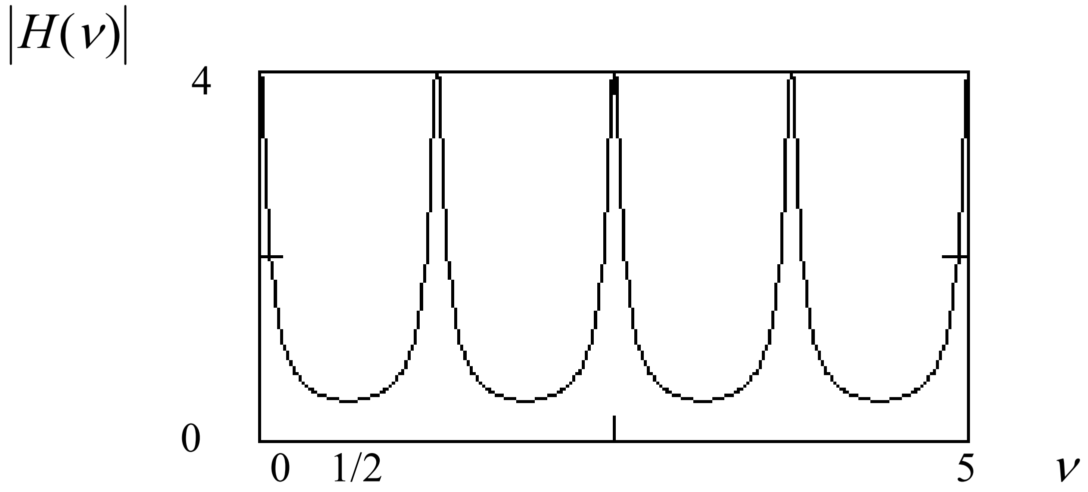
$$\rightarrow \boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1-(1+I)z^{-1}}}$$

*Réponse Fréquentielle*

$$H(\nu) = \frac{1}{1-(1+I)e^{-i2\pi\nu}} = \frac{1}{[1-(1+I)\cos(2\pi\nu)] + i[(1+I)\sin(2\pi\nu)]}$$

$$\left|H(\nu)\right| = \frac{1}{\sqrt{[1-(1+I)\cos(2\pi\nu)]^2 + [(1+I)\sin(2\pi\nu)]^2}}$$

$$Arg[H(\nu)] = -Arctg\left(\frac{(1+I)\sin(2\pi\nu)}{1-(1+I)\cos(2\pi\nu)}\right)$$




($I$ = 25% !)

Système du **1er ordre** et de nature **passe-bas**

(élimination des composantes de $u(k)$ de fréquence élevée).