

6. Transformation de Fourier Discrète (TFD - *DFT*) - Transformation de Fourier Rapide (TFR - *FFT*)

1. TFD

TFD = TF par calculateur numérique d'un signal $x(t)$:

$$TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

Formule non implémentable sur calculateur numérique

3 problèmes pour implémenter, programmer cette formule :

1) $x(t) \rightarrow x^*(t)$

Entrée du calculateur = $x^*(t)$ (séquence $\{x(nT)\}$) et non $x(t)$:

$$x(t) \quad \text{---} \diagup \text{---} \quad x(nT)$$

T

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \sum_{\text{sur } M \text{ échantillons}}$

Fenêtrage du signal d'entrée sur M échantillons - Somme discrète

3) $X(f) \rightarrow X_k$

Résultat du calculateur = X_k et non $X(f)$

La prise en compte de ces 3 contraintes conduit à la relation de TFD :

$$X(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} x(nT) e^{-i2\pi kn/M}$$

TFD d'une séquence $\{x(n)\}$ causale :

$x(n)$ M termes et causale	$\xrightarrow{\text{TFD}}$	$X(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-i2\pi kn/M} = \text{TFD}[x(n)]$ M termes
---------------------------------	----------------------------	---

TFD Inverse (TFDI) :

$$\left. \begin{array}{l} x(n) \\ M \text{ termes} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{M-1} X(k) e^{i2\pi kn/M} \\ M \text{ termes} \end{array} \right\} = \text{TFDI}[X(k)]$$

Propriété de symétrie de la TFD d'une séquence réelle

$$\left. \begin{array}{l} x_n \\ M \text{ termes} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{TFD}} \left. \begin{array}{l} X_k = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x_n e^{-i2\pi kn/M} \\ M \text{ termes} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Propriété Symétrie (signaux réels)}$$

$$X_{M-k} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x_n e^{-i2\pi(M-k)n/M} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x_n e^{i2\pi kn/M}$$

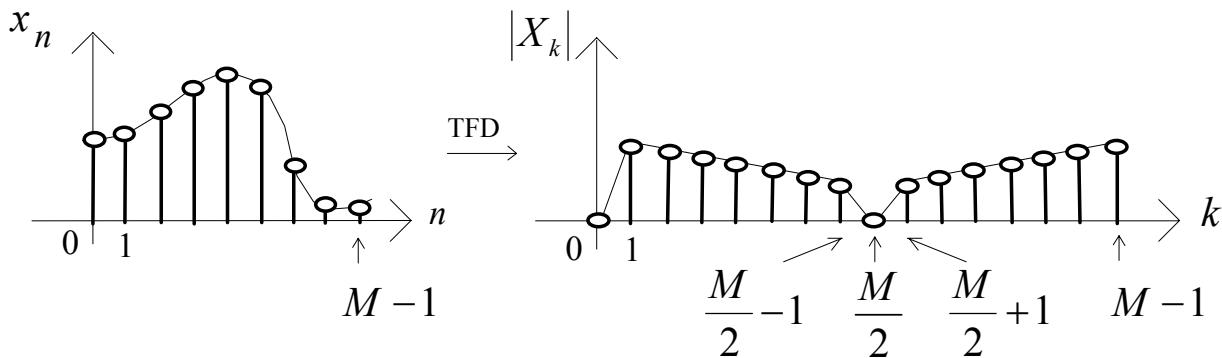
$$\rightarrow X_{M-k} = \overline{X_k} \quad \text{si } x_n \text{ réel} \quad \rightarrow |X_k| = |X_{M-k}| \quad \text{si } x_n \text{ réel}$$

$$x_n \text{ réel} \xrightarrow{\text{TFD}} X_{M-k} = \overline{X_k} \quad \text{pour } k = 1 \rightarrow M/2$$

$$x_n \text{ réel} \xrightarrow{\text{TFD}} |X_k| = |X_{M-k}| \quad \text{pour } k = 1 \rightarrow M/2$$

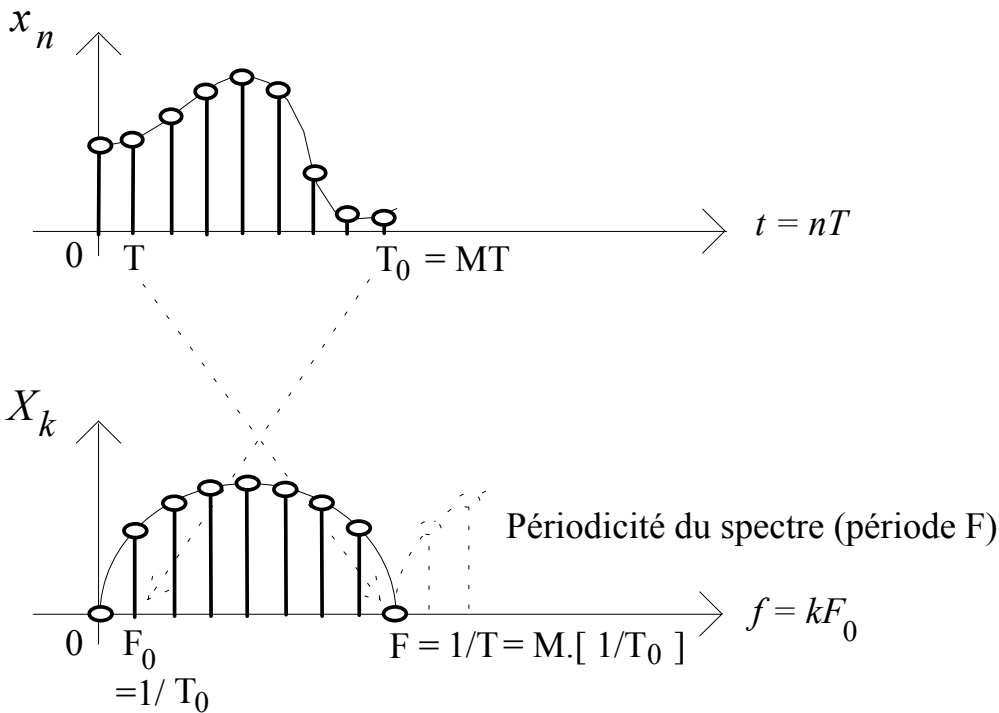
et aussi :

$$x_n \text{ réel} \xrightarrow{\text{TFD}} \text{Arg } X_k = -\text{Arg } X_{M-k} \quad \text{pour } k = 1 \rightarrow M/2$$



$$|X_k| \text{ pour } k = \frac{M}{2} \rightarrow M-1 = \text{Miroir \% à } k = \frac{M}{2} \text{ de } |X_k| \text{ pour } k = 0 \rightarrow \frac{M}{2}-1$$

Interprétation



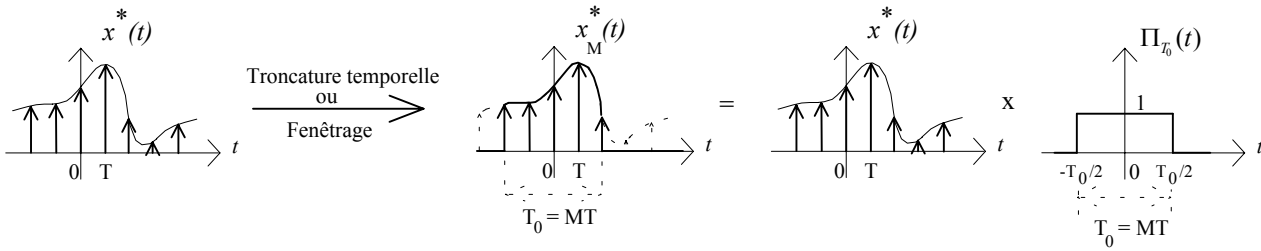
T_0 : Durée d'observation de x_n
 T : Période d'échantillonnage
 M : Nombre d'échantillons

Exemple $\left\{ \begin{array}{l} T_0 = 1 \text{ s} \\ T = 0.1 \text{ s} \\ M = 10 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} F_0 = 1/T_0 = 1 \text{ Hz} \\ F = 10 \text{ Hz} \end{array} \right.$

- Si l'on veut « voir » des composantes spectrales $X(f)$ d'un signal $x(t)$ jusqu'à une fréquence F , il faut échantillonner $x(t)$ au moins à la fréquence d'échantillonnage F , soit au plus à la cadence $T = 1/F$

- L'incrément fréquentiel du spectre $X(f)$ de $x(t)$ est $1/T_0$ où T_0 est la durée d'observation, de fenêtrage, de $x(t)$

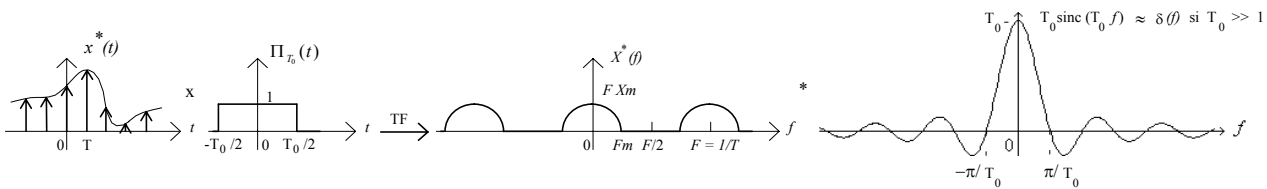
Correction du fenêtrage de $\{x(n)\}$ (limitation du nombre d'échantillons M)



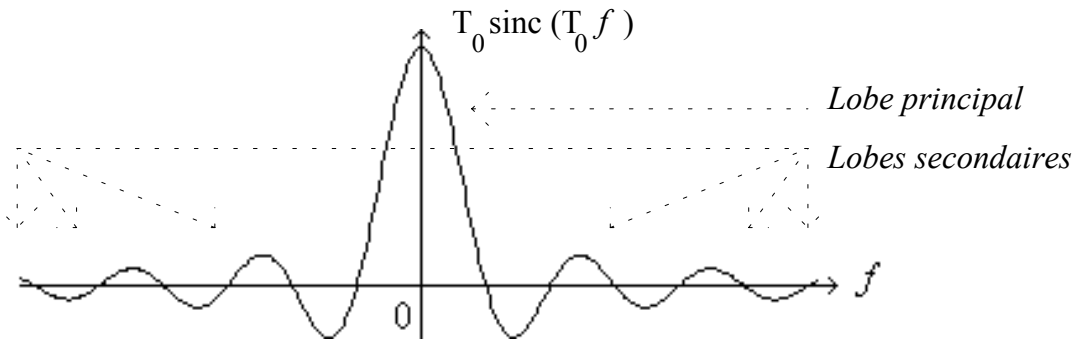
Si T_0 est suffisamment grand (fenêtre de troncature assez large) :

$$\Pi_{T_0}(t) = 1 \quad \forall t \quad \rightarrow \quad TF[\Pi_{T_0}(t)] \approx TF[1] = \delta(f)$$

Représentation spectrale :

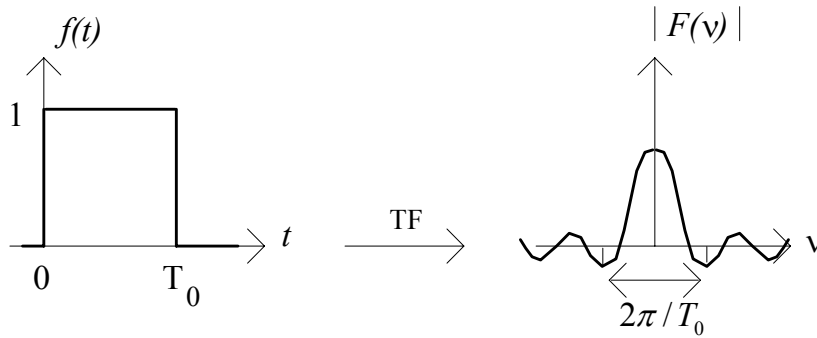


L'effet du fenêtrage est d'autant plus important que T_0 est faible :
il déforme $X^*(f)$ par l'action des lobes secondaires de $T_0 \text{ sinc}(T_0 f)$

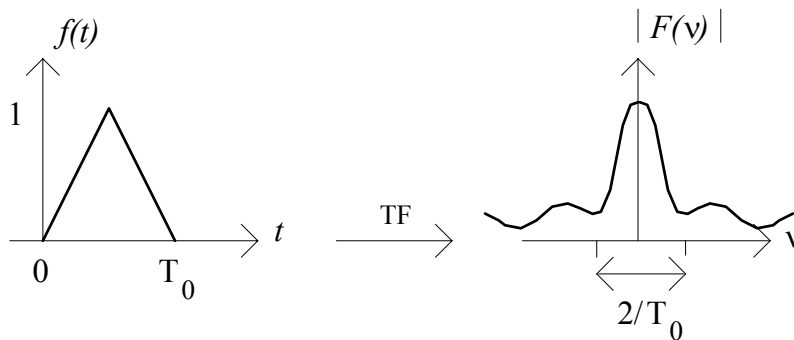


Fenêtres de troncature de pondération

. Fenêtre rectangulaire (basique) : $f(t) = \Pi_{T_0} \left(t - \frac{T_0}{2} \right)$

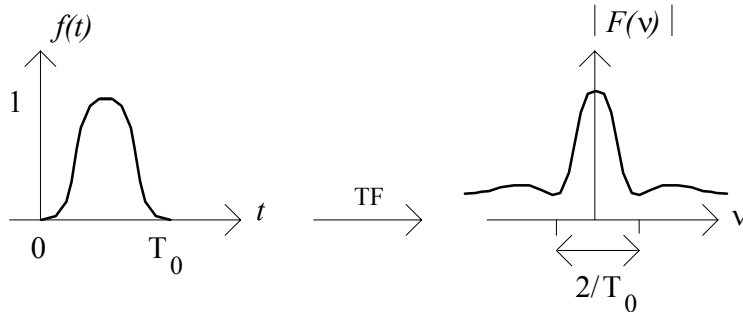


. Fenêtre de Bartlett (triangulaire) : $f(t) = 1 - \frac{\left| t - \frac{T_0}{2} \right|}{\frac{T_0}{2}}$



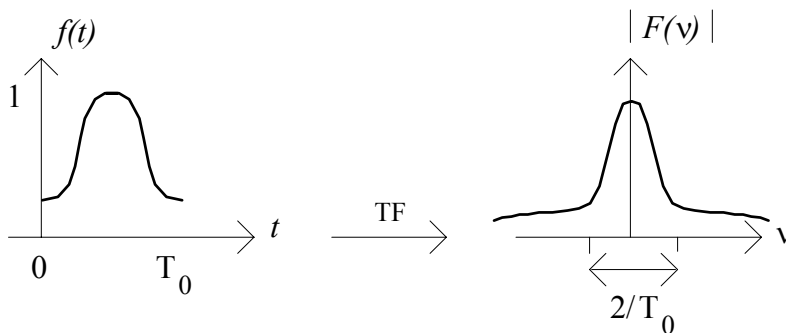
. Fenêtre de Hann :

$$f(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{(t - \frac{T_0}{2})}{T_0} \right) \right]$$



. Fenêtre de Hamming :

$$f(t) = 0.54 + 0.46 \cos \left[2\pi \frac{(t - \frac{T_0}{2})}{T_0} \right]$$



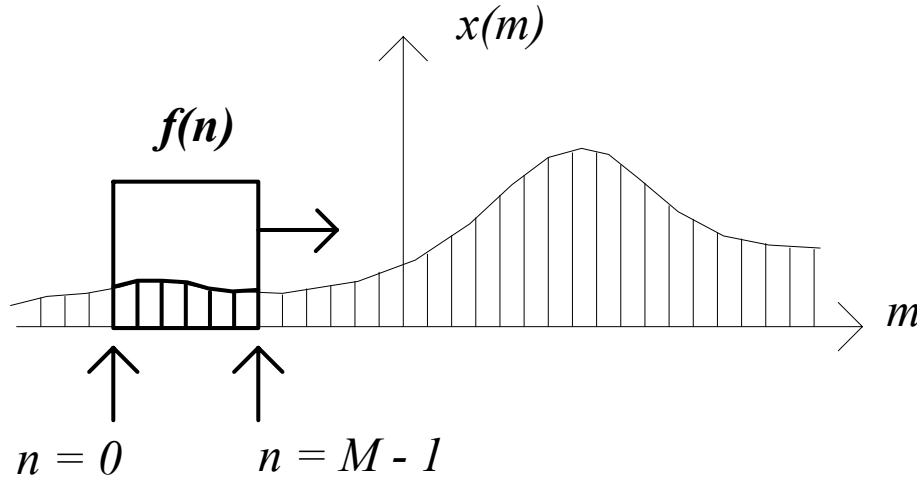
Etc ...

. Fenêtres de Blackman, de Kaiser, de Hanning ...

Applications

Spectrogramme

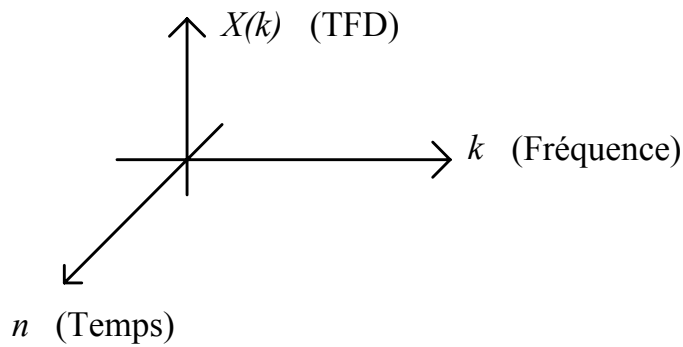
TFD du signal $x(n)$ en faisant glisser la fenêtre $f(n)$ de prise d'échantillons



On obtient alors, pour chaque indice n de fenêtre $f(n)$, une TFD :

$$X(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x(m) e^{-i2\pi km/M}$$

et au total non plus un spectre (2D), mais un spectrogramme (3D)
(*Représentation Temps-Fréquence*) :

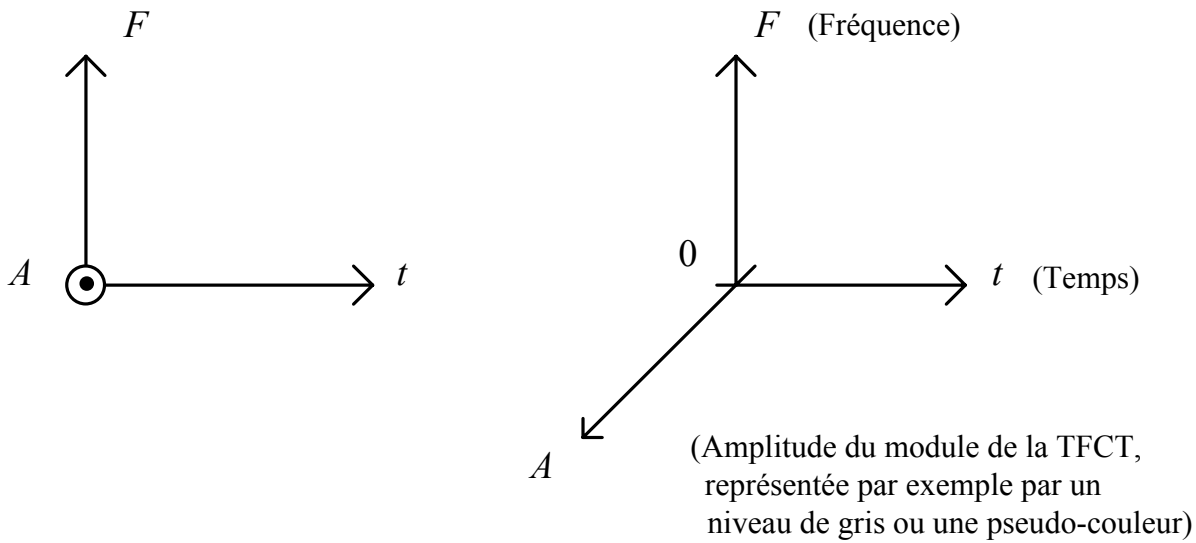


C'est la TFCT :

$$X(n, k) = \frac{1}{M} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) f(n-m) e^{-\frac{i2\pi km}{M}}$$

$f(n)$: fenêtre de troncature (rectangulaire, Blackman, Bartlett ...)

Représentation 3D du spectrogramme



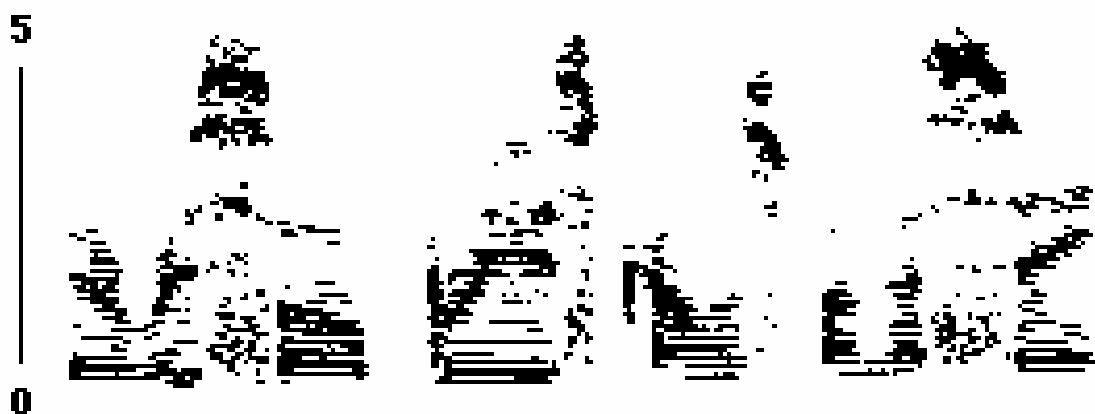
"EVERY SALT BREEZE COME FROM THE SEA"

Frequency (kHz)



WIDEBAND (Nombre d'échantillons M grand)

Frequency (kHz)

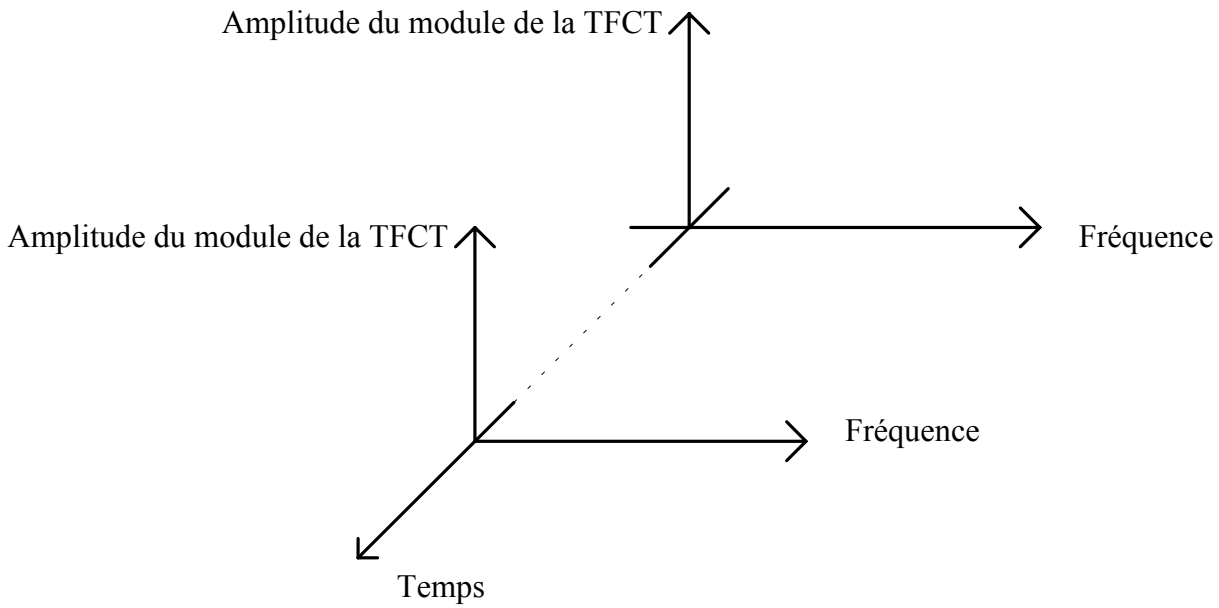


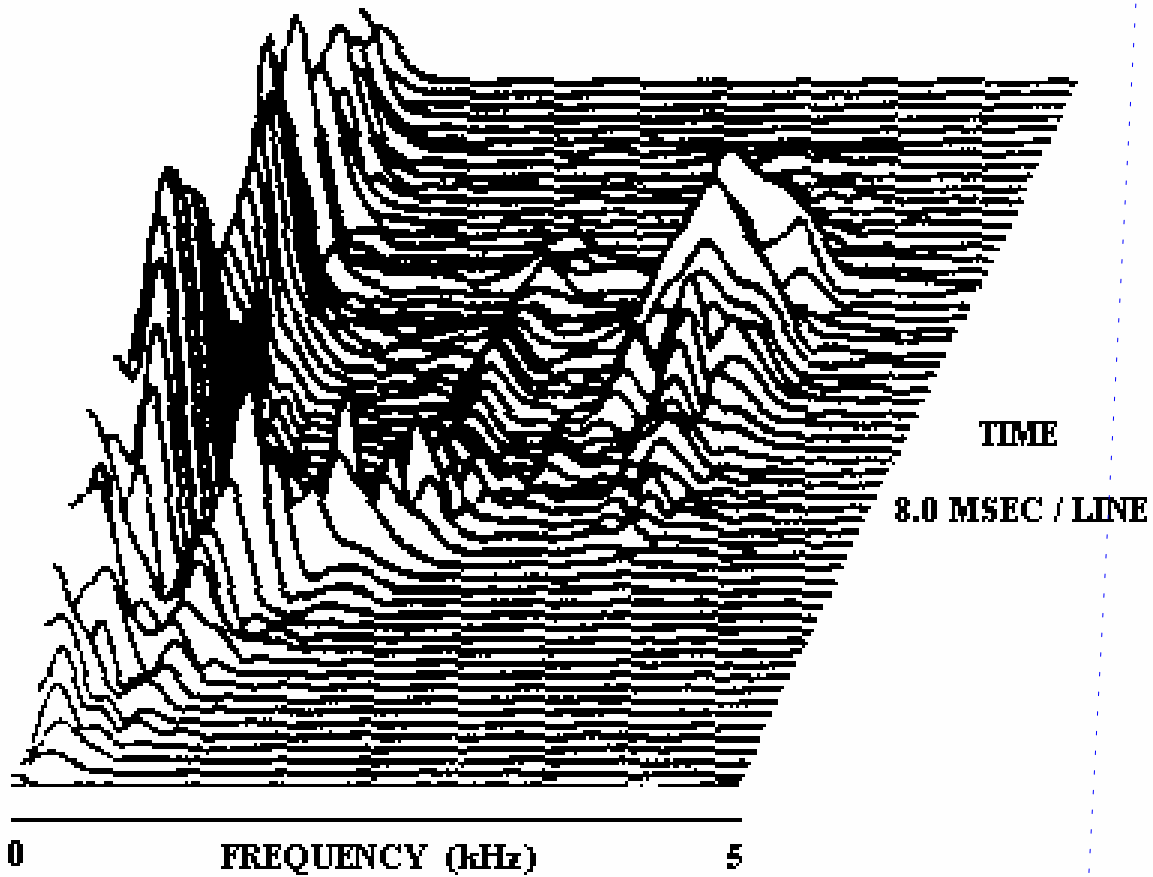
NARROWBAND (Nombre d'échantillons M petit)

0 1.0 2.0
Time (sec.)

Wideband and narrowband 3D spectrograms of a sentence.

Spectrogramme comme graphes 2D



60 DFT PASSES OF SPOKEN WORD "READ"

Spectrogram (from 2D graphs) of the word "READ" computed from contiguous 8 msec. speech segments.

TFR

Le calcul direct de chaque terme de la TFD :

$$X(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-i2\pi kn/M} \quad (1)$$

nécessite **par terme** :

$$\begin{aligned} \cdot M \text{ multiplications (x) complexes} &\equiv \begin{cases} 4M : \text{x reelles} \\ 2M : + \text{ reelles} \end{cases} \\ \cdot M-1 \text{ additions (+) complexes} &\equiv 2(M-1) : + \text{ reelles} \end{aligned}$$

$$\text{Soit au total, pour } \mathbf{M} \text{ termes : } \begin{cases} 4M^2 : \text{x reelles} \\ 2M(2M-1) : + \text{ reelles} \end{cases}$$

Exemple :

$$\text{Pour } M = 1024 \text{ points} \rightarrow \begin{cases} 4\,194\,304 : \text{x} \\ 4\,192\,256 : + \end{cases}$$

Avec un DSP, on peut faire une addition-multiplication en 300 ns

→ Temps de Calcul de la TFD $\cong \underline{1,2 \text{ s}}$

→ Pour un calcul en Temps Réel, il faut $F = \frac{1}{T} = \frac{M}{T_0} = \frac{1\,024}{1,2} \approx 1 \text{ kHz}$

On ne peut calculer en TR la TFD de signaux avec des fréquences $> 500 \text{ Hz}$!

→ Algorithme TFR : algorithme de Cooley (1963) :

le nombre d'échantillons M doit être une puissance de 2 :

$$M = 2^m \rightarrow m = \log_2 M$$

Algorithme de Cooley : (Entrelacement Temporel) :

Principe (partitionnement)

$$\{ x(n) \text{ à } M \text{ termes} \} \begin{array}{l} \rightarrow \{ x_1(n) \} : \text{termes de rang pair } (M/2 \text{ termes}) \\ \rightarrow \{ x_2(n) \} : \text{termes de rang impair } (M/2 \text{ termes}) \end{array}$$

de Transformées respectives :

$$\{ X(k) \text{ à } M \text{ termes} \} \begin{array}{l} \rightarrow \{ X_1(k) \} (M/2 \text{ termes}) \\ \rightarrow \{ X_2(k) \} (M/2 \text{ termes}) \end{array}$$

L'opération est ensuite répétée m fois jusqu'aux Transformées d'ordre 1

Exemple :

Pour $M = 1024$ points : (Comparaison avec la TFD calculée pour $M = 1024$ en Temps Réel : $F_m < 500$ Hz)

$$\text{On a : } \left| \begin{array}{ll} 18\,432 & \times \\ 30\,720 & + \end{array} \right.$$

→ Avec le même DSP que précédemment (300 ns pour 1 +/x)

il faut un temps calcul de 5.5 ms environ soit $\frac{1.2 \text{ s}}{200}$

→ Pour $M = 1024$ points, la TFR est 200 fois plus rapide que la TFD

La TFR peut traiter en TR des signaux avec des fréquences < 100 kHz !