

## 7. Filtrage linéaire. Analyse & Synthèse des filtres numériques

### FILTRAGE LINEAIRE

#### Introduction

##### Filtrage analogique

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow y(t) \qquad FT : H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

*Matérialisation* (électrique par ex.) :

$$x(t) \longrightarrow \triangle \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = f[x(t)] : \text{équa. diff.}$$

*Avantage* : - rapidité du traitement analogique

*Inconvénient* : - solution figée

##### Filtrage numérique

$$x(k) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y(k) \qquad FT : H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

*Matérialisation* :

Algorithme (équa. aux diff.) + CNA

$$y(k) = f[x(k)]$$

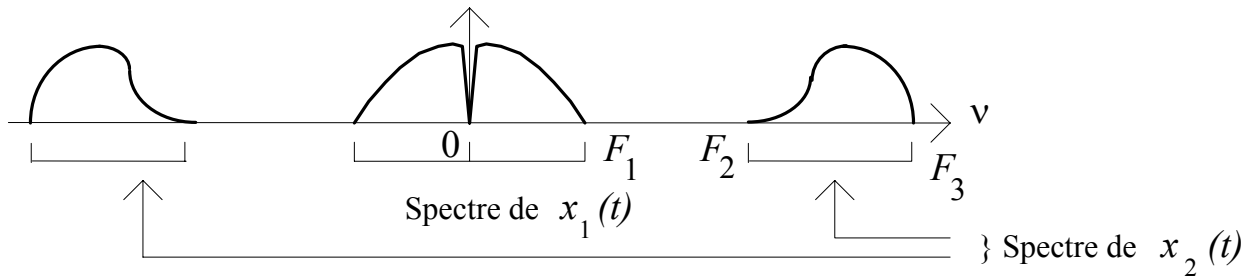
*Avantage* : - souplesse de modification de l'algorithme

*Inconvénients* : - temps de décodage des instructions

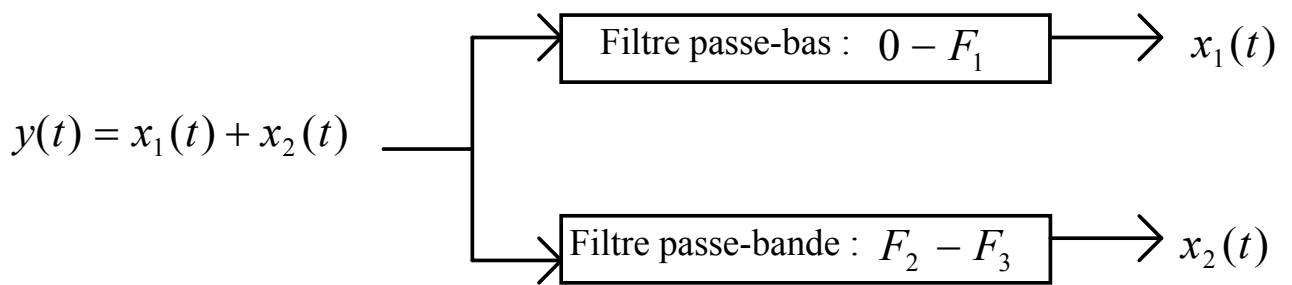
- fréquence d'échant. limitée (technologie)

**FILTRAGE ANALOGIQUE**

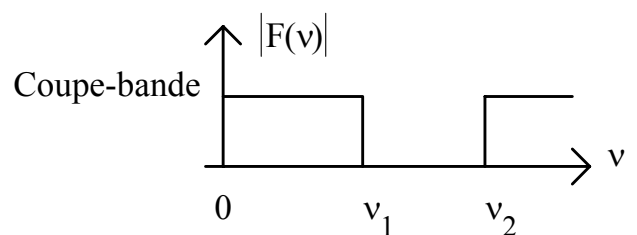
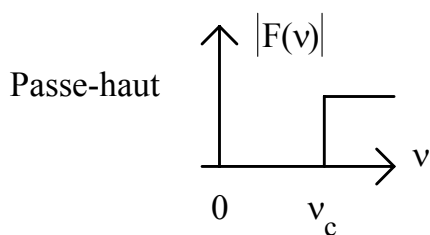
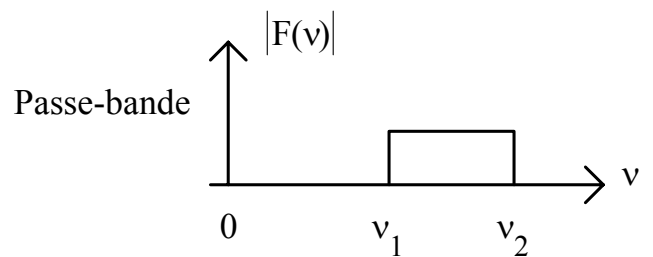
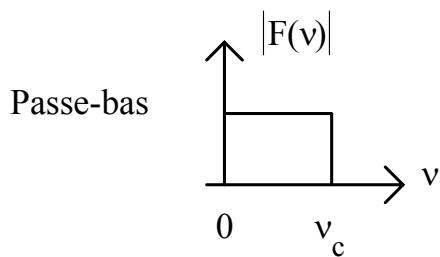
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



Filtrage fréquentiel :



Plus généralement, on distingue 4 types de filtres idéaux  $F(\nu)$  :



**Filtres fondamentaux** = Filtres passe-bas et de fréquence de coupure  $\nu_c = 1$

**Filtre à partir d'un filtre passe-bas de FT  $H(p)$  de pulsation de coupure  $\omega_c = 1$  rd/s**

**Changement de variable en  $p$  dans la FT  $H(p)$  du filtre**

*Passe-bas de pulsation de coupure  $\omega_c$*

$$p \rightarrow \frac{p}{\omega_c}$$

*Passe-haut de pulsation de coupure  $\omega_c=1$*

$$p \rightarrow \frac{1}{p}$$

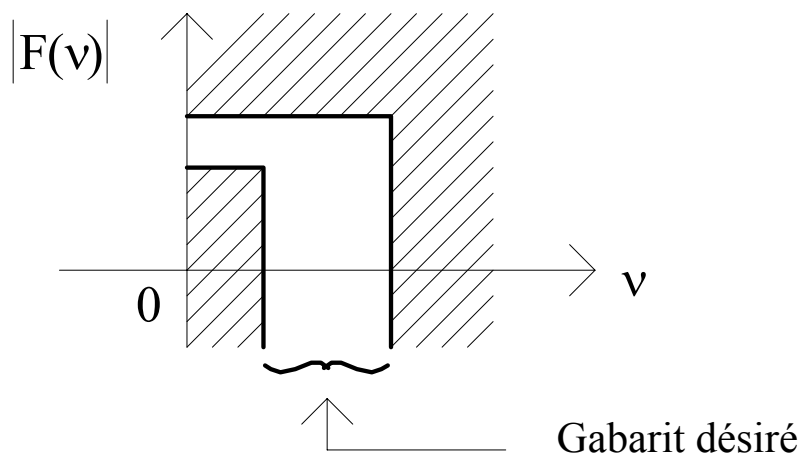
*Passe-bande de largeur  $B$  centré sur  $\omega = 1$*

$$p \rightarrow \frac{1}{B} \left( p + \frac{1}{p} \right)$$

*Coupe-bande de largeur  $B$  centré sur  $\omega = 1$*

$$p \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{B} \left( p + \frac{1}{p} \right)}$$

Le problème du filtrage consiste à faire entrer la RF  $F(\nu)$  dans un gabarit :

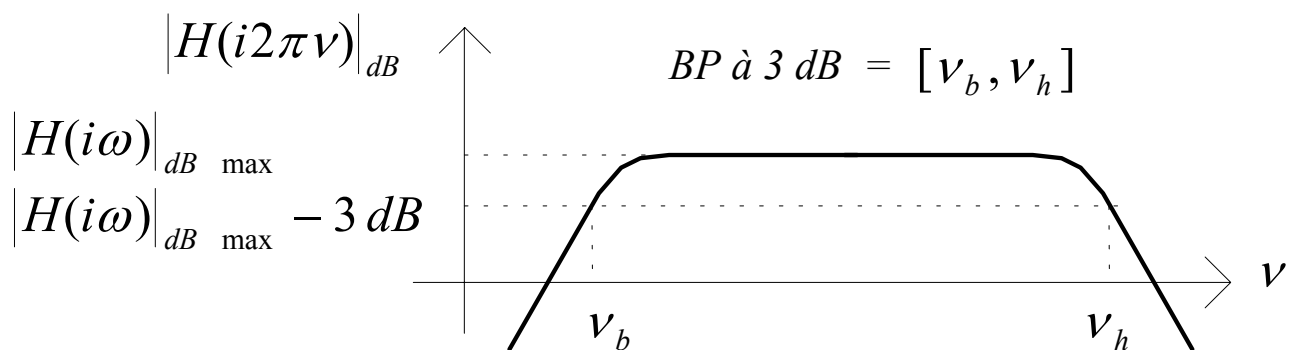


## Bande Passante d'un filtre

La BP à 3 dB d'un filtre est le domaine de fréquences tel que :

$$\left| H(i\omega) \right|_{dB \text{ max}} - 3 \text{ dB} \leq \left| H(i\omega) \right|_{dB} \leq \left| H(i\omega) \right|_{dB \text{ max}}$$

Rappel :  $\left| H(i\omega) \right|_{dB} \equiv \left| H(i2\pi\nu) \right|_{dB} = 20 \log(|H(i\omega)|)$



Exemple : BP d'un canal de communication :

BP d'une ligne téléphonique = fréquences vocales [300 Hz - 4 kHz]

*Filtres normalisés*

**Filtre du 1er ordre passe-bas fondamental**

- FT passe-bas : 
$$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

- RF : (entrée du filtre = sinusoïde de pulsation  $\omega$  variable)

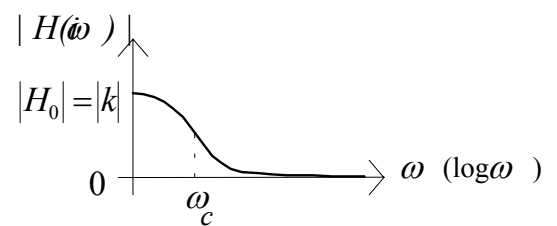
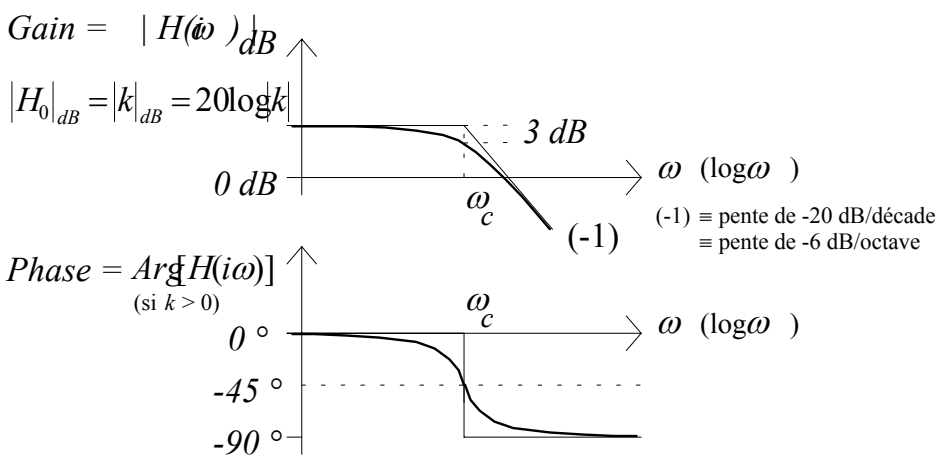
$$H(p=i\omega) = \frac{k}{1+i\omega\tau} = \frac{k}{1+i\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$k$  : Gain statique [ $\equiv$  gain  $H(i\omega)$  à  $\omega = 0$ ] noté  $H_0$  ( $\omega = 0 \leftrightarrow t = \infty$ )

$\tau$  : C<sup>te</sup> de temps ( $\tau > 0$ )

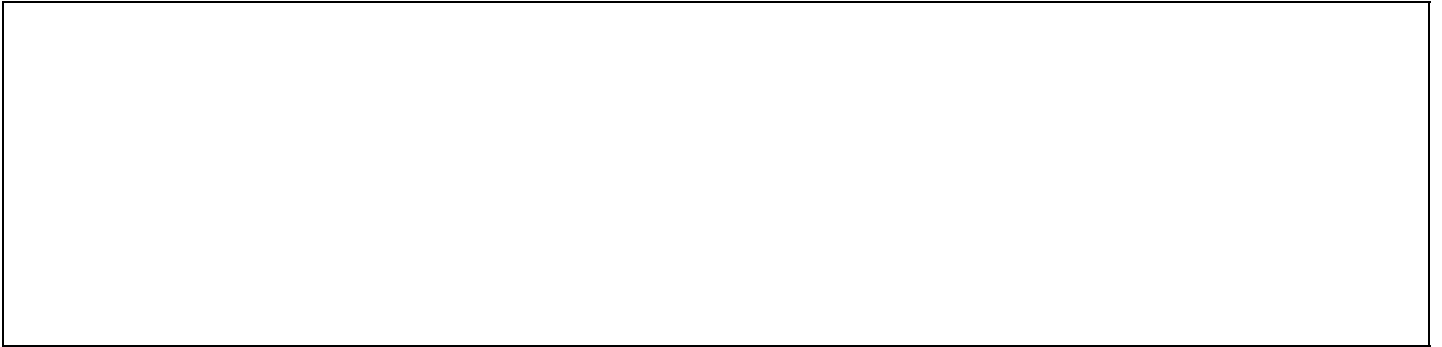
$\omega_c = 1 / \tau$  : Pulsation de coupure ( $\omega_c > 0$ )

$\omega = 2\pi\nu$      $\omega$  : pulsation     $\nu$  : fréquence



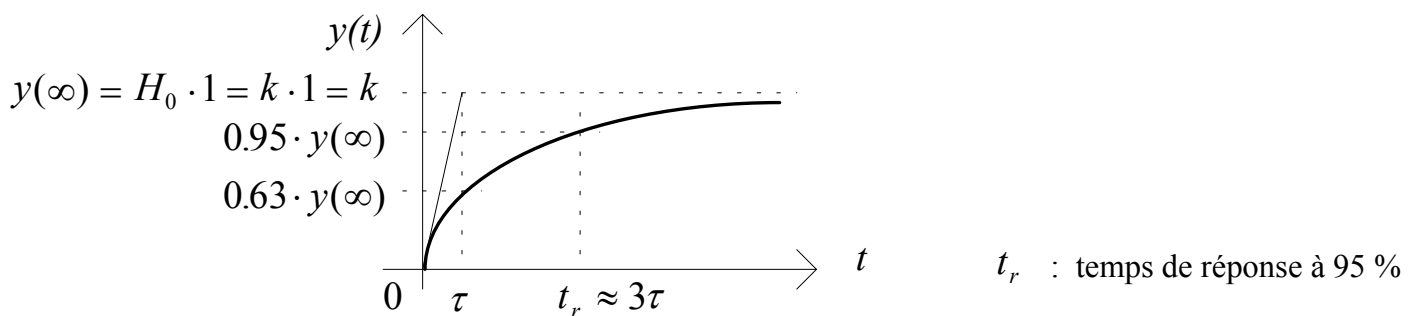
- RI : (entrée du filtre  $x(t) = \delta(t)$  )

$$h(t) = TL^{-1}[H(p)] = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau} \Gamma(t)$$



- Réponse indicielle : (entrée du filtre  $x(t) = \Gamma(t)$  )

$$y(t) = TL^{-1}[H(p) \cdot TL[\Gamma(t)]] = TL^{-1}\left[H(p) \frac{1}{p}\right] = k(1 - e^{-t/\tau}) \Gamma(t)$$



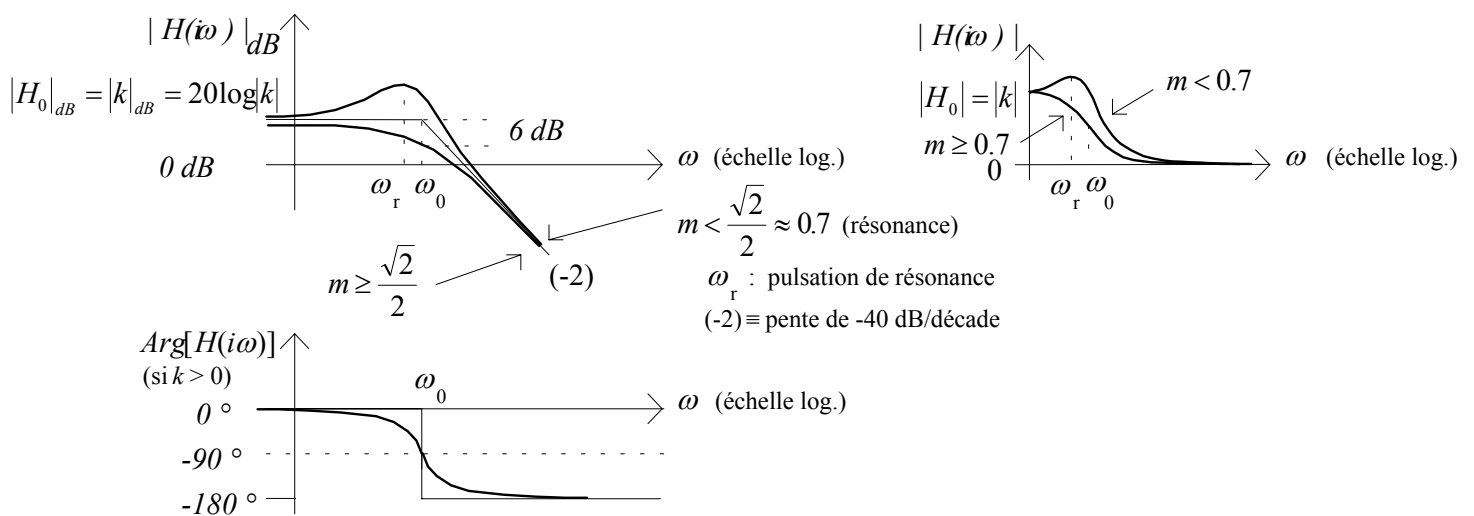
## Filtre du 2nd ordre passe-bas fondamental

- FT passe-bas :

$$H(p) = \frac{k}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2m}{\omega_0}p + 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} k : \text{Gain statique } [\equiv \text{gain } H(i\omega) \text{ à } \omega = 0] \text{ noté } H_0 \quad (\omega = 0 \leftrightarrow t = \infty) \\ \omega_0 : \text{Pulsation propre non amortie } (\omega_0 > 0) \\ m = \text{Facteur d'amortissement } (m > 0) \end{array} \right.$$

- RF : (entrée du filtre = sinusoïde de pulsation  $\omega$  variable)

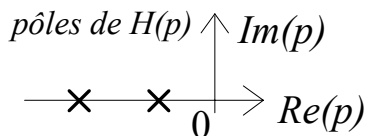
$$H(i\omega) = \frac{k}{1 + 2mi \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$



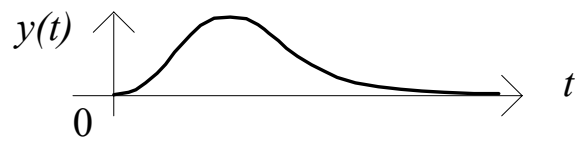
- RI : (entrée du filtre  $x(t) = \delta(t)$  )

$$y(t) = TL^{-1} [ H(p) \cdot TL[\delta(t)] ] = TL^{-1} [ H(p) ] \quad \text{3 cas :}$$

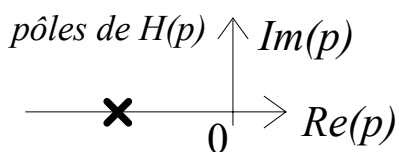
- $m > 1$  : régime hyper-amorti (apériodique) : 2 pôles réels de  $H(p)$



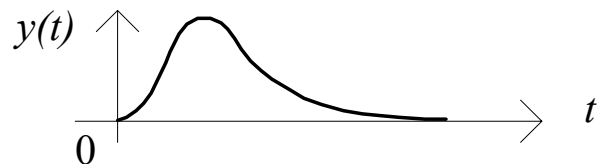
$$y(t) = \frac{k\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \Gamma(t)$$



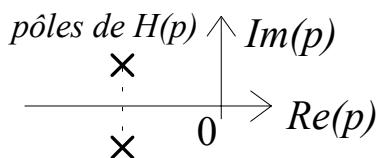
- $m = 1$  : régime critique (apériodique) : 1 pôle double réel de  $H(p)$  :



$$y(t) = k\omega_0^2 e^{-\omega_0 t} t \Gamma(t)$$



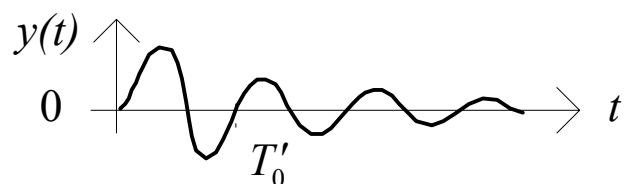
- $0 < m < 1$  : régime pseudo-périodique : 2 pôles complexes conjugués



$\omega'_0$  : pseudo - pulsation

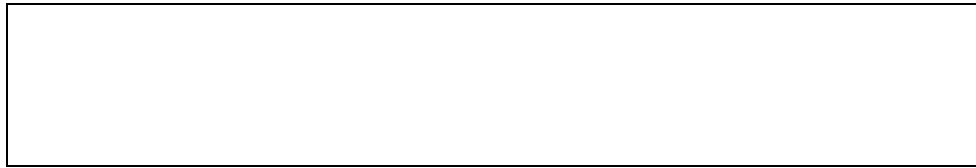
$T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0}$  : pseudo - période

$$y(t) = \left[ k\omega_0 \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1 - m^2}} \sin(\omega'_0 t) \right] \Gamma(t)$$



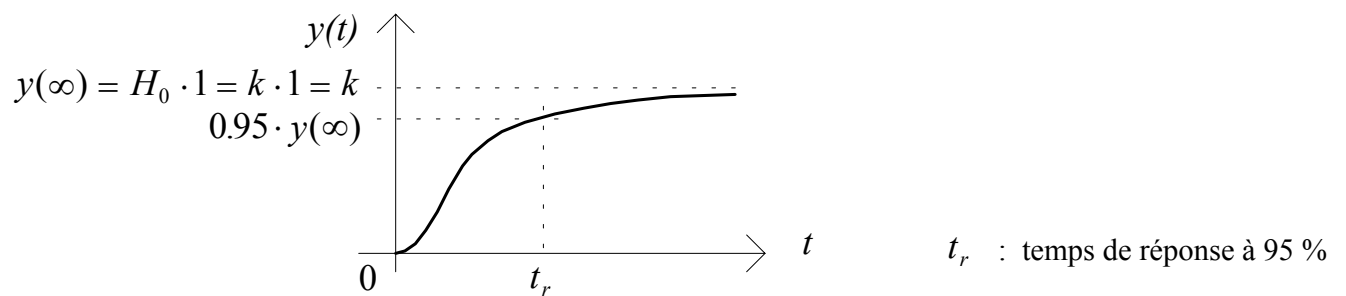


- Réponse indicielle : (entrée du filtre  $x(t) = \Gamma(t)$  )

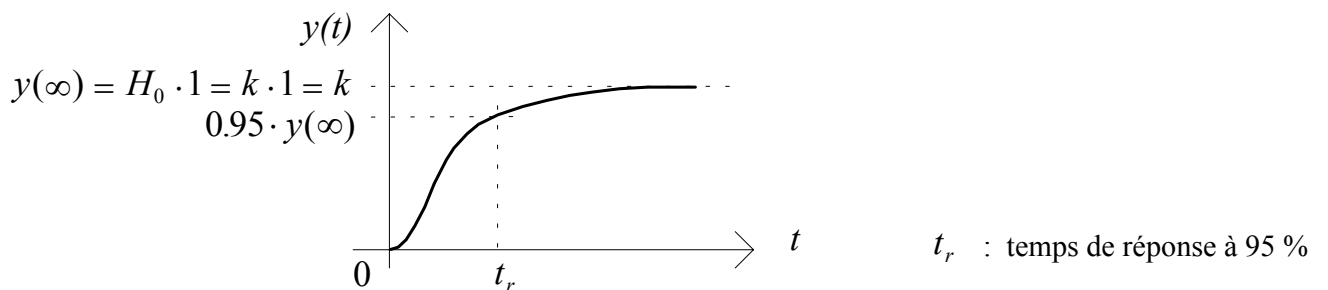


3 cas :

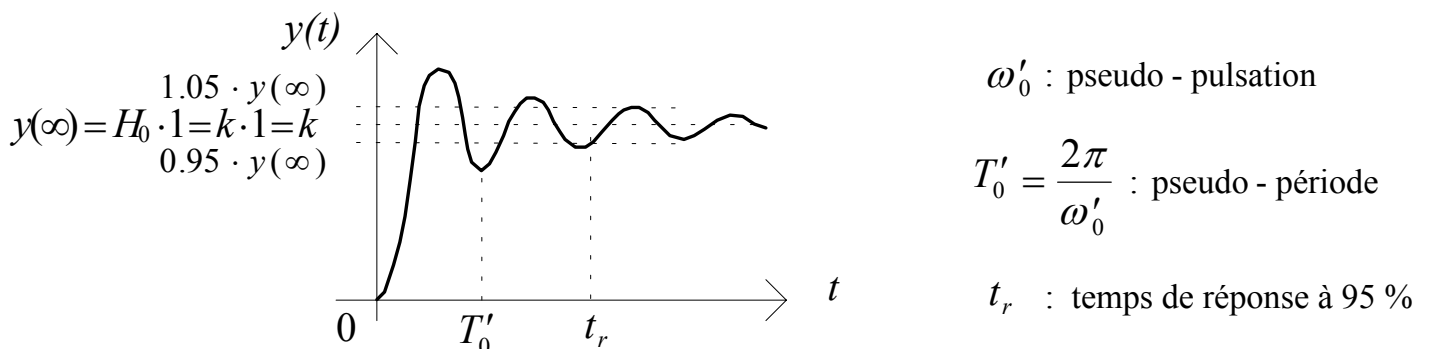
- $m > 1$  : régime hyper-amorti (apériodique) : 2 pôles réels de  $H(p)$



- $m = 1$  : régime critique (apériodique) : 1 pôle double réel de  $H(p)$  :



- $0 < m < 1$  : régime pseudo-périodique : 2 pôles complexes conjugués



## Filtres de Butterworth (filtres polynomiaux : $H(p) = (\text{polynôme})^{-1}$ )

(Maximally flat)

$$H(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

avec :

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Les paramètres  $a_i$  se déduisent des relations de définition précédentes :

Exemple :  $n = 2$  :

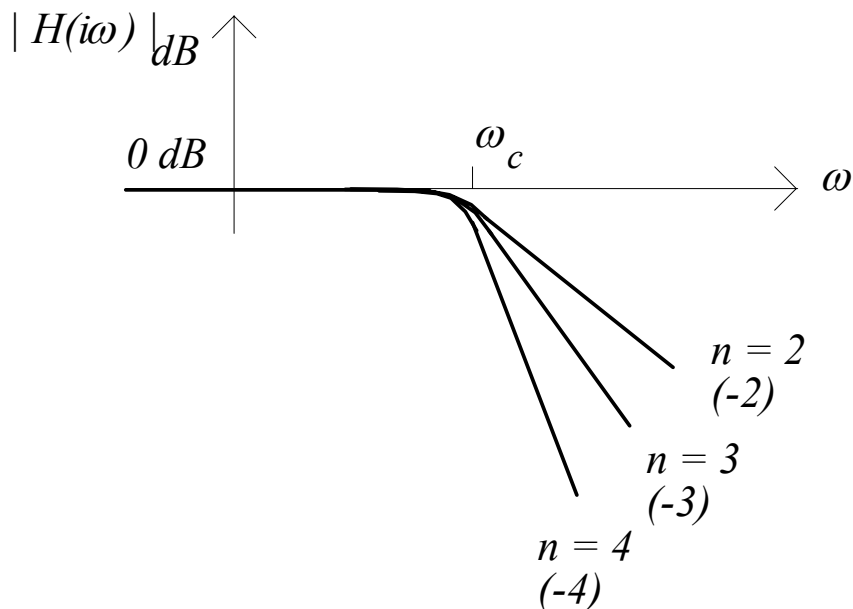
$$H(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

$$H(i\omega) = \frac{1}{-a_2 \omega^2 + a_1 i \omega + a_0}$$

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{a_0^2 + a_2^2 \omega^4 - 2a_0 a_2 \omega^2 + a_1^2 \omega^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4} \rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{\omega_c} \\ a_2 = \frac{1}{\omega_c^2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{\omega_c} \\ a_2 = -\frac{1}{\omega_c^2} \end{cases}$$

Paramètres  $a_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4 \dots$
$n = 1$	1	1	-	-	-
$n = 2$	1	$\sqrt{2}$	1	-	-
$n = 3$	1	2	2	1	-
$n = 4$	1	2.6131	3.4142	2.6131	1
...					



Les filtres de Butterworth possèdent une RF  $H(i\omega)$  en module plate au maximum ( $\equiv$  sensiblement constante) dans la BP

→ Les signaux de différente fréquence (dans la BP) sont tous amplifiés de la même façon (gain constant)

## Filtres de Tchebychev (filtres polynomiaux) (*Equal ripple*)

Ces filtres présentent une ondulation d'amplitude constante  $\varepsilon$  dans la BP

$$H(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

avec :

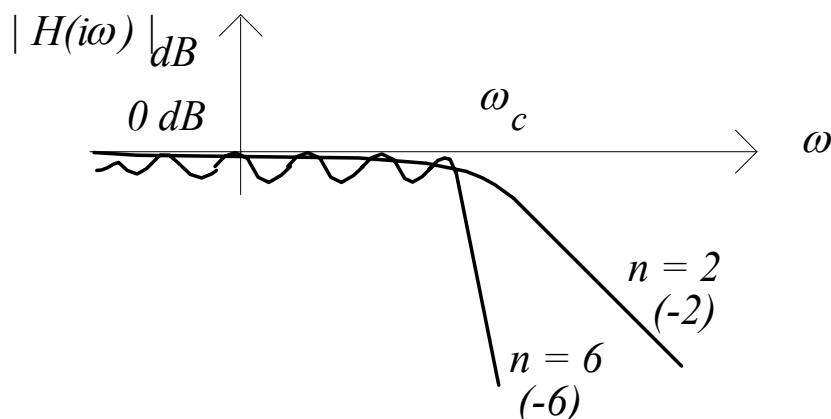
$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} T_n^2(\omega)}$$

$T_n(\omega)$  : polynôme de Tchebychev d'ordre  $n$  obtenu par récurrence :

$$T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x) \quad \text{et} \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

Paramètres  $a_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4 \dots$
$n = 2$	1	0.9957	0.907	-	-
$n = 3$	1	2.5206	2.0116	2.0353	-
$n = 4$	1	2.6942	5.2749	3.4568	3.628
...					



## Filtres de Legendre (filtres polynomiaux)

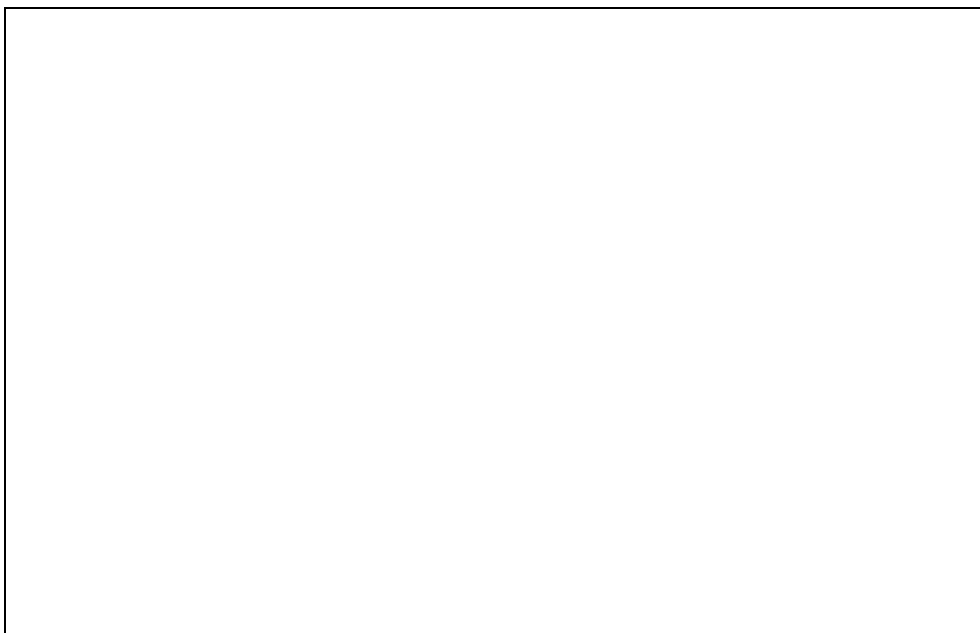
(pente la plus forte possible (pour un ordre  $n$  donné) à la fréq. de coupure)

$$H(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

avec : ... (Polynômes de Legendre)

Paramètres  $a_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4 \dots$
$n = 2$	1	$\sqrt{2}$	1	-	-
$n = 3$	1	2.3537	2.27	1.7319	-
$n = 4$	1	3.0411	4.6253	3.828	2.4493
...					



### Filtres de Bessel (filtres polynomiaux)

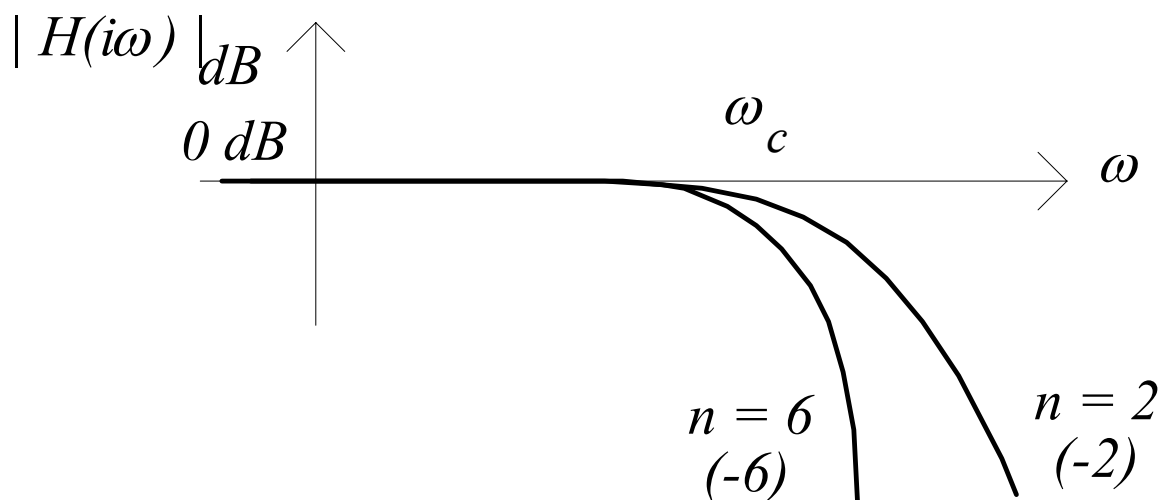
$$H(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

avec ... (Polynômes de Bessel)

Ils ont pour objet de réaliser l'approximation d'un retard pur  $e^{-\tau p}$  provoquant un temps de propagation constant à travers le filtre (égal à  $\tau$ ).

Paramètres  $a_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4 \dots$
$n = 2$	3	3	1	-	-
$n = 3$	15	15	6	1	-
$n = 4$	105	105	45	10	1
...					



**Filtres de Cauer** (filtres elliptiques :  $H(p)$  fraction rationnelle)

Les RF ont des ondulations à la fois dans la BP et dans la bande coupée

$$H(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

avec :  $|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2 E^2(\omega)}$

où  $E(\omega) = \prod_{i=1}^m \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{1 - \omega_i^2 \omega^2}$  pour l'ordre du filtre  $n = 2m$

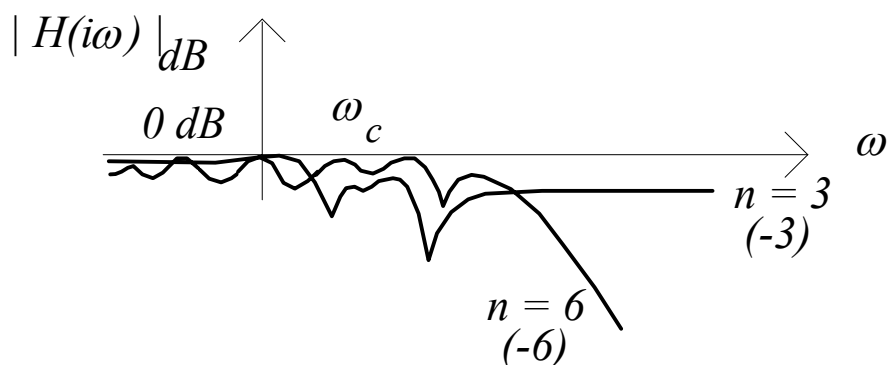
$$E(\omega) = \omega \prod_{i=1}^m \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{1 - \omega_i^2 \omega^2}$$

pour l'ordre du filtre  $n = 2m + 1$

Les pulsations  $\omega_i$  ( $i = 1..m$ ) sont déterminées pour que  $E(\omega)$  ait une ondulation d'amplitude constante (type Tchebychev).

Paramètres  $a_i, b_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$b_0 / a_0$	$b_1 / a_1$	$b_2 / a_2$	$b_3 / a_3$	$b_4 / a_4$
$n = 3$	1/1	0/2.0235	0.1038/1.6404	0/1.3228	-
$n = 4 \dots$	1/1	0/2.2818	0.3993/3.6938	0/2.4801	0.0226/2.1035



## Filtres de Tchebychev inverses (filtres elliptiques)

La RF est plate dans la BP - Ondulation présente dans la bande coupée

$$H(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

avec :

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} T_n^2(1/\omega)}{1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} T_n^2(1/\omega)}$$

où  $T_n(\omega)$  : polynôme de Tchebychev d'ordre  $n$  obtenu par récurrence :

$$T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x) \quad \text{et} \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

Paramètres  $a_i, b_i$  donnés pour  $\omega_c = 1$  rd/s et pris positifs :

Ordre	$b_0 / a_0$	$b_1 / a_1$	$b_2 / a_2$	$b_3 / a_3$	$b_4 / a_4$
$n = 3$	1/1	0/8.4672	0.75/3.6597	0/79.05	-
$n = 4 \dots$	1/1	0/6.2917	1/20.7925	0/40.54	0.125/39.5285



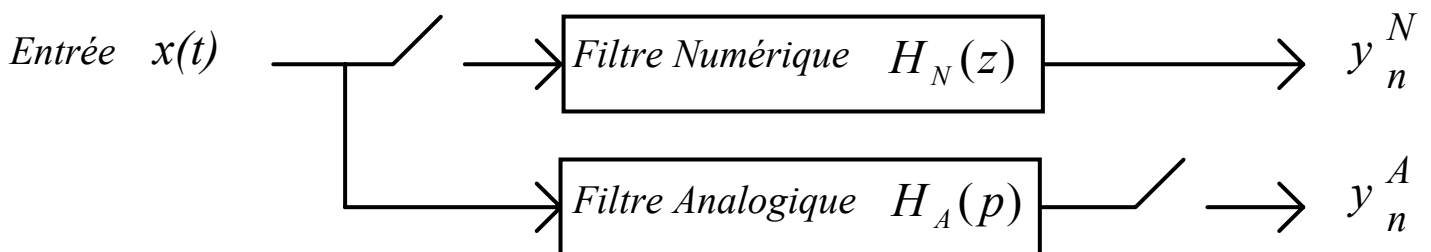
## FILTRAGE NUMERIQUE

### Synthèse d'un filtre numérique

2 approches :

*1ère approche :* Déterminer la FT discrète  $H_N(z)$  « équivalente » à la FT continue  $H_A(p)$  du filtre analogique modèle

→ Il s'agit de déterminer  $H_N(z)$  de telle sorte que  $y_n^N = y_n^A \quad \forall x(t)$  :



**La solution (coeffs du filtre  $H_N(z)$ ) dépend du signal d'entrée  $x(t)$**

→ Plusieurs techniques de synthèse :

#### *Techniques temporelles de synthèse*

- Synthèse par Invariance Impulsionnelle :  $x(t) = \delta(t)$
- Synthèse par invariance indicielle :  $x(t) = \Gamma(t)$

#### *Techniques fréquentielles de synthèse*

- Synthèse par équivalence de la dérivation (Transformation d'Euler)
- Synthèse par équivalence de l'intégration (Transformation Bilinéaire)

**Cette 1ère approche conduit à des filtres numériques récurrents**

*2nde approche :*

Le calcul de ces filtres utilise ici une structure **non réursive**, et les coeffs du filtre peuvent être déterminés de 2 façons :

1) En faisant référence à la FT continue du filtre analogique modèle

- - Synthèse par technique impulsionnelle.
- Synthèse par échantillonnage en fréquence.

2) En se donnant un gabarit sur le module de la RF du filtre numérique, et en déterminant les coeffs afin d'optimiser un critère de performance

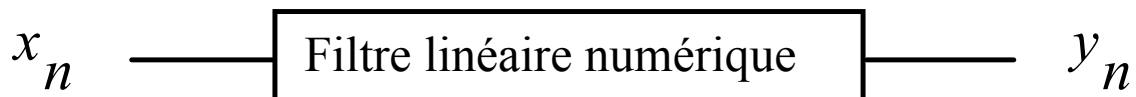
- Utilisation de méthodes d'optimalisation (PNL)  
(≡ algorithmes de résolution de systèmes d'équations non linéaires)
- Algorithme de Remez (algorithme le plus utilisé)

## Structures AR, MA, et ARMA des filtres numériques

### Modèle ARMA

Un filtre numérique linéaire causal est décrit par la relation de récurrence générale (équation aux différences) :

$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}$$



C'est le modèle ARMA (AutoRégressif à moyenne mobile)  
(*Autoregressive with Moving Average*)

Dans le domaine fréquentiel, on a : (avec CI nulles)

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^p a_k z^{-k} - Y(z) \sum_{k=1}^q b_k z^{-k} \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}$$

## Modèle AR

$a_k \equiv 0$  (sauf  $a_0$ )  $\rightarrow$  on a un système quasiment purement *récuratif* :

$$y_n = a_0 x_n - \sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}$$

et :

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}} = \frac{a_0}{\prod_{k=1}^q (1 - p_k z^{-k})}$$

(après décomposition en éléments simples :  $p_k$ , pôles de  $H(z)$ )

C'est le Modèle *AR* (AutoRégressif) appelé encore modèle *tout pôle*

Le modèle :  $y_n = -\sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}$  est le modèle de processus AR purement récuratif, donc basé uniquement sur ses CI (pas d'entrée)

## Modèle MA

$b_k \equiv 0 \rightarrow$  on a un système réduit à : (système *non récursif*)

$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k}$$

et :

$$H(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^{-k}$$

C'est le Modèle *MA* (*Moving Average*) appelé encore modèle *tout zéro*

## ANALYSE DES FILTRES NUMERIQUES

*On a vu :* les filtres récurrents ont une structure ARMA

*On va établir :* les filtres récurrents sont des filtres RII (IIR)

*On a vu :* les filtres non récurrents ont une structure MA

*On va établir :* les filtres non récurrents sont des filtres RIF (FIR)

### Introduction : Algorithmes de Traitement du Signal

*Filtres RIF* 
$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k}$$

$x_n$  : entrée     $y_n$  : sortie     $a_k$  : coefficients du filtre

*Filtres RII* 
$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}$$

$x_n$  : entrée     $y_n$  : sortie     $a_k, b_k$  : coefficients du filtre

*Filtres adaptatifs RIF* 
$$y_n = \sum_{k=0}^p a_k(n) x_{n-k} \quad \text{avec:}$$

$$a_k(n) = a_k(n-1) + \delta e_n x_{n-k} \quad \text{où} \quad e_n = r_n - y_n$$

$x_n$  : entrée     $y_n$  : sortie     $a_k(n)$  : coefficients du filtre

$y_n$  reproduit un signal de référence  $r_n$

$e_n$  : erreur (commande l'évolution de  $a_k(n)$  au cours du temps)

$\delta$  : règle la vitesse de cette évolution

*Corrélateurs (auto ou inter)* 
$$C_k = \sum_{n=0}^{N-1-k} x_n y_{n-k} \quad (\text{intercorrélation})$$

$C_k$  : coeffs d'intercorrélation des signaux  $x_n$  et  $y_n$  sur  $N$  échantillons

*Fenêtrage* 
$$y_n = x_n \cdot w_n$$

signal fenêtré  $y_n =$  produit de  $x_n$  par la fenêtre  $w_n$  de  $N$  échantillons

*Transformées (Fourier, Hilbert ...)*

*Exemple: TFD* 
$$[x(n)] : X(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-i2\pi kn / M}$$

*Génération de signal*

*Exemple: signal aléatoire à distribution uniforme :*

$$x(n) = A x(n-1) \bmod P$$

Init. :  $0 < x(0) < P$

$x(n)$  est pseudo-aléatoire car périodique de période  $P$

$P$  : nombre premier, de valeur élevée

$A$  : facteur d'échelle

*Calcul matriciel*

*Exemple : Produit scalaire* 
$$p = \sum_{n=0}^k x_n y_n \quad \text{de } x_n \text{ et } y_n \text{ de dim. } k+1$$

## Analyse des filtres numériques RIF

(filtres non récurrents, MA, ou encore filtres transversaux)

### Structure de réalisation

Equation aux différences

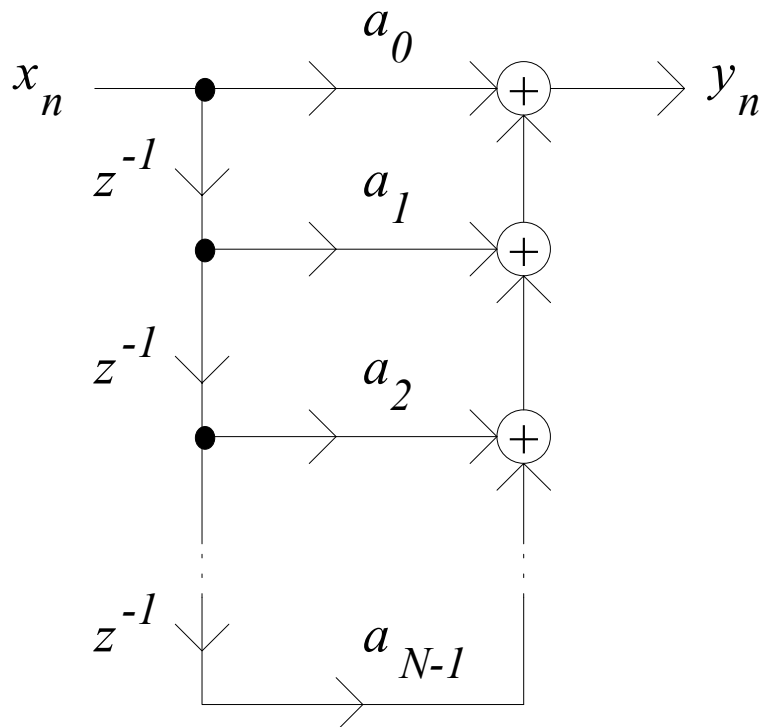
$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_{n-k}$$

(filtre RIF causal)

Les filtres *non récurrents* sont dits *MA*

Forme directe de réalisation (schéma-bloc) (block diagram)

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_{N-1} x_{n-(N-1)}$$





## Stabilité

$$\mathbf{FT} : y_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_{n-k} \xrightarrow{TZ} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \boxed{H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}$$

**la FT n'a pas de pôles  $\rightarrow$  Un filtre RIF est toujours stable**

(coeffs  $a_k$  finis (et en nombre fini), sinon filtre non programmable  
 $\rightarrow$  le filtre RIF répond par une sortie bornée à une entrée bornée)

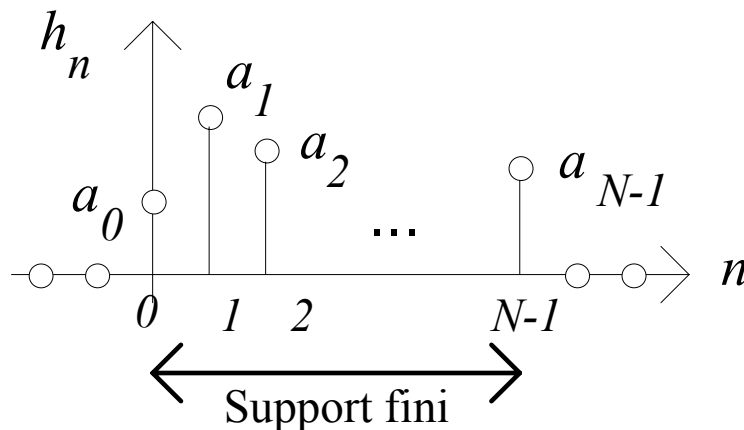
## RI

$$x_n = \delta_n \quad \text{dans} \quad y_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_{n-k} \quad \rightarrow \quad h_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta_{n-k}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{h_k \equiv a_k}$$

Comme  $N$  fini (sinon filtre non programmable)  $\rightarrow$  support  $N$  de la RI fini

$\rightarrow$  **Filtres non récurrents  $\equiv$  filtres MA  $\equiv$  filtres RIF**



## Réponse indicielle

Entrée  $x_n = \Gamma_n$  dans  $y_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_{n-k}$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} D_n = 0 & \text{si } n < 0 \\ D_n = \sum_{k=0}^n a_k & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ D_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k & \text{si } n \geq N-1 \end{array} \right.$$

$D_n \equiv$  cumul des coefficients  $a_k$  du filtre

## Réponse Fréquentielle $H(\nu)$

. Séquence  $x(n)$  :

On fait :  $z = e^p$  avec  $p = i2\pi\nu$  dans la FT  $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}$

$$\rightarrow \boxed{H(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i2\pi k\nu}} \quad H(\nu) \equiv H(e^{i2\pi\nu}) \text{ périodique (période } \nu = 1)$$

. Séquence  $x(nT)$  :

On fait :  $z = e^{pT}$  avec  $p = i2\pi\nu$  dans la FT  $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}$

$$\rightarrow \boxed{H(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i2\pi k\nu T}} \quad H(\nu) \equiv H(e^{i2\pi\nu T}) \text{ périodique (période } \nu = 1/T)$$

La RF en série de Fourier a pour coeffs de la décomposition les coeffs  $a_k$

## Filtres RIF à phase linéaire

### Rappel

Filtre linéaire de RF  $H(\nu)$  est à phase linéaire si :

$$\text{Arg}H(\nu) = -\lambda\nu \quad \text{avec} \quad \lambda = C^{te}$$

(le signe - symbolise un retard en temps)

### Propriété

Filtre à phase lin. retarde tous les signaux  $\forall$  leur fréquence d'un même temps

### Filtres RIF à phase linéaire

$$\text{RF : } H(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi k\nu T} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos 2\pi k\nu T - i \sum_{k=0}^{N-1} h_k \sin 2\pi k\nu T$$

$$\rightarrow \boxed{\text{Arg}H(\nu) = -\text{Arctg} \left( \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k \sin 2\pi k\nu T}{\sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos 2\pi k\nu T} \right)}$$

$$\text{Arg}H(\nu) = -\text{Arctg} \left( \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k \sin 2\pi k \nu T}{\sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos 2\pi k \nu T} \right)$$

- Peut-on avoir  $\text{Arg}H(\nu) \equiv 0 \quad \forall \nu$  (retard du filtre nul) ?

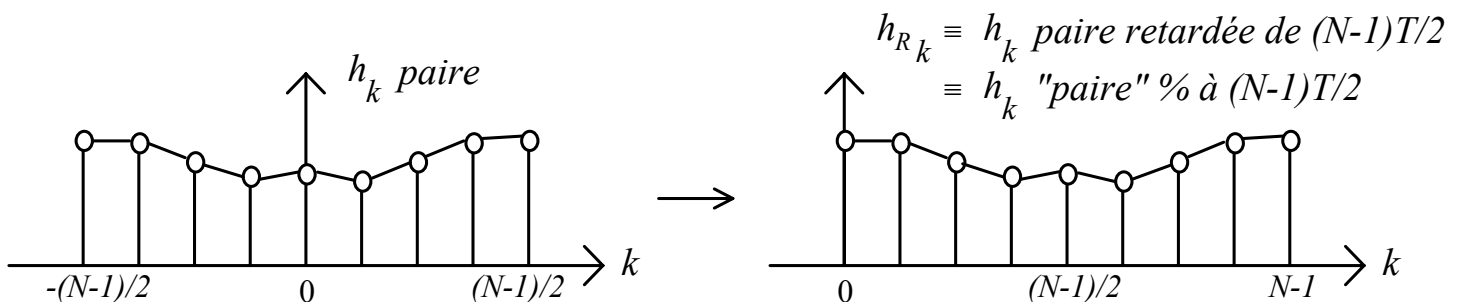
$$\text{Arg}H(\nu) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N-1} h_k \sin 2\pi k \nu T = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Impossible } \forall \nu$$

**SAUF SI**  $h_k =$  fonction **paire** et  $\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}$  (filtre  $h_k$  non causal !)

Rappel : Théorème du retard (Fourier)

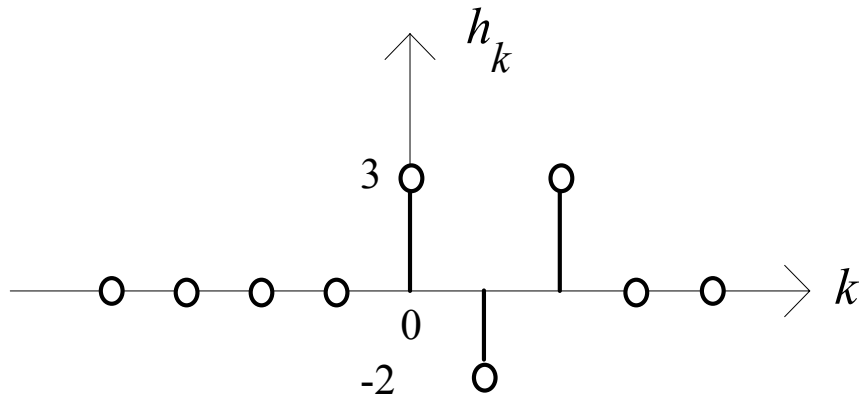
$$h_k \text{ retardée de } (N-1)T/2 \xrightarrow{TF} H(\nu) e^{-i\pi(N-1)T\nu} \triangleq H_R(\nu)$$

$\rightarrow \text{Arg} H_R(\nu) = -\pi(N-1)T\nu$  est linéaire

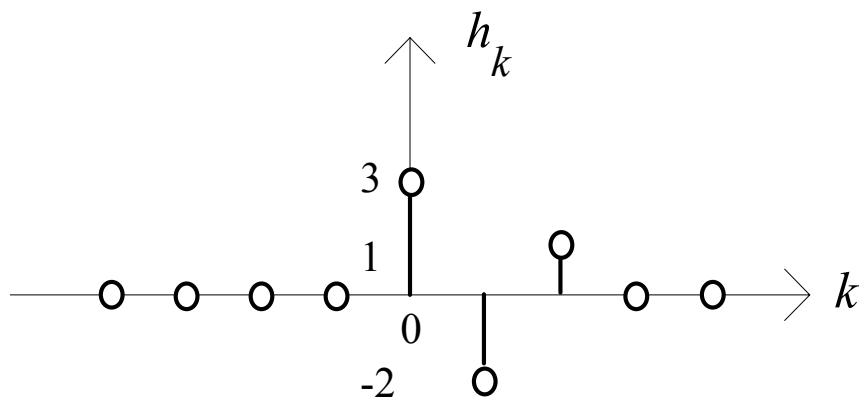


$\rightarrow$  Un filtre de RI  $h_k$  causale, de durée  $N$  et symétrique % à  $(N-1)T/2$  est à phase linéaire :  $-\pi(N-1)T\nu$

*Exemple :*  $y_n = 3x_n - 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$  est RIF à phase linéaire



$y_n = 3x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}$  n'est pas à phase linéaire



*Exemple d'application des filtres à phase linéaire :*

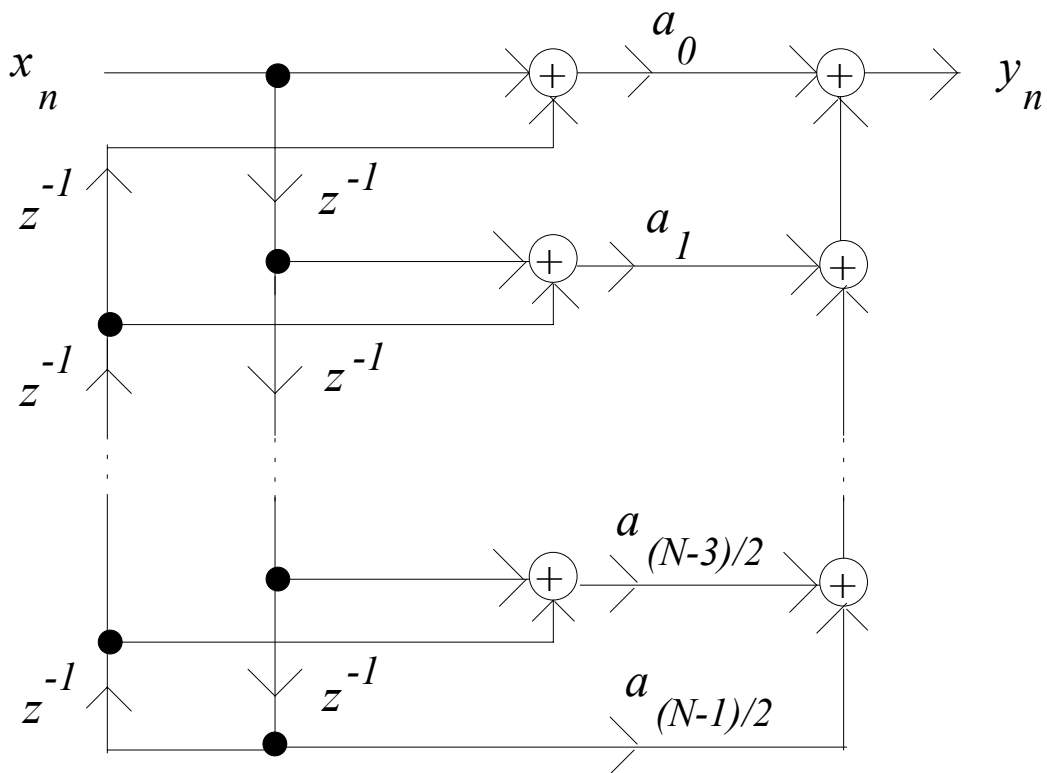
Les traitements synchrones

*Implémentation d'un filtre RIF à phase linéaire*

*(optimisation du temps de calcul du filtre)*

Symétrie de la RI  $\rightarrow$  structure optimisée du filtre RIF à phase linéaire

$$(a_0 = a_{N-1} ; a_1 = a_{N-2} ; \dots)$$



### Filtres RIF en treillis (*Lattice filters*)

(*optimisation de la précision du filtre*)

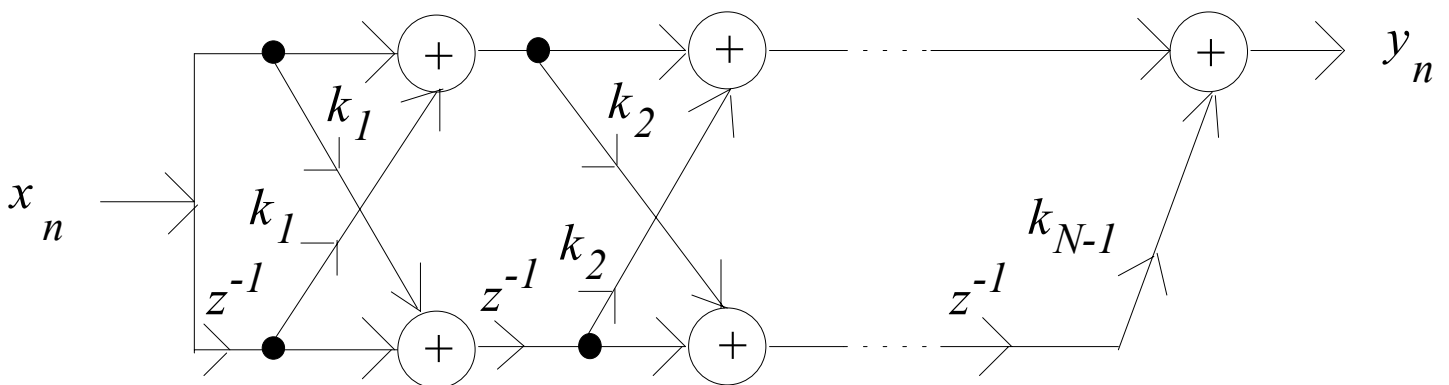
*But* : Réduire le bruit de quantification des paramètres d'un filtre RIF  
(compensation due à la structure croisée)

*Analyse numérique* :

- . La division de coefficients atténue l'erreur de troncature
- . La multiplication de coefficients accroît l'erreur de troncature

*Structure générale*

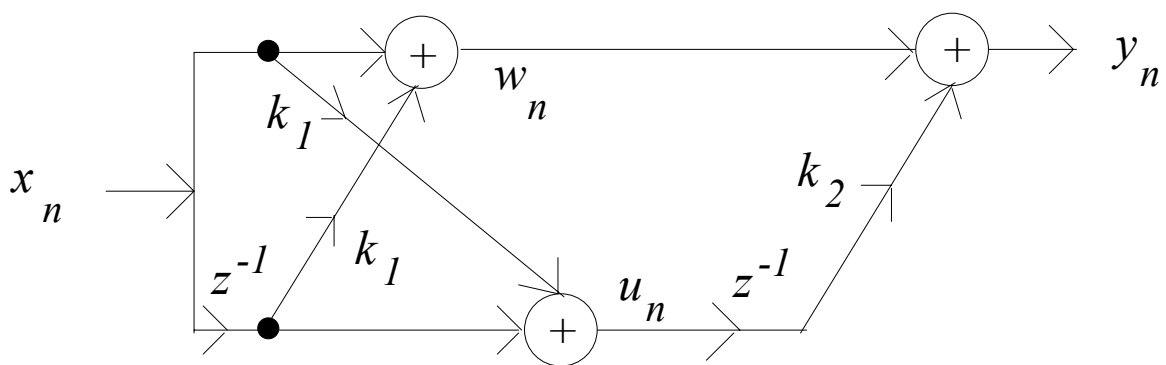
$$H(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1}$$



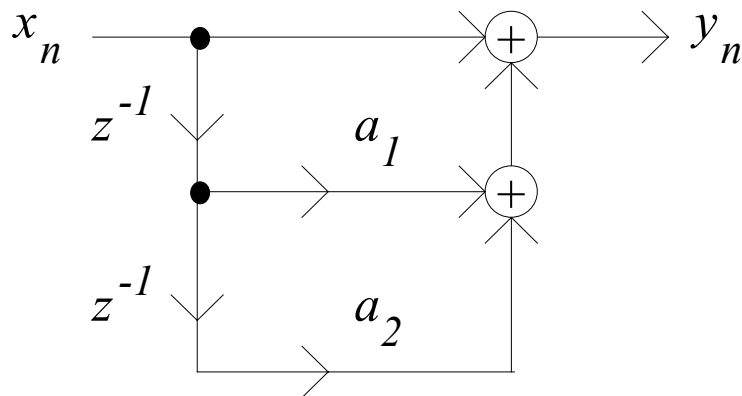
Exemple : Filtre RIF en treillis du 2nd ordre :

$$H(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 1 + (k_1 + k_1 k_2) z^{-1} + k_2 z^{-2}$$

avec :  $k_1 = \frac{a_1}{1 + a_2}$        $k_2 = a_2$



Le même filtre, de structure simple (non treillis) :





# Analyse des filtres numériques RII (*filtres récurifs* ou encore *ARMA*)

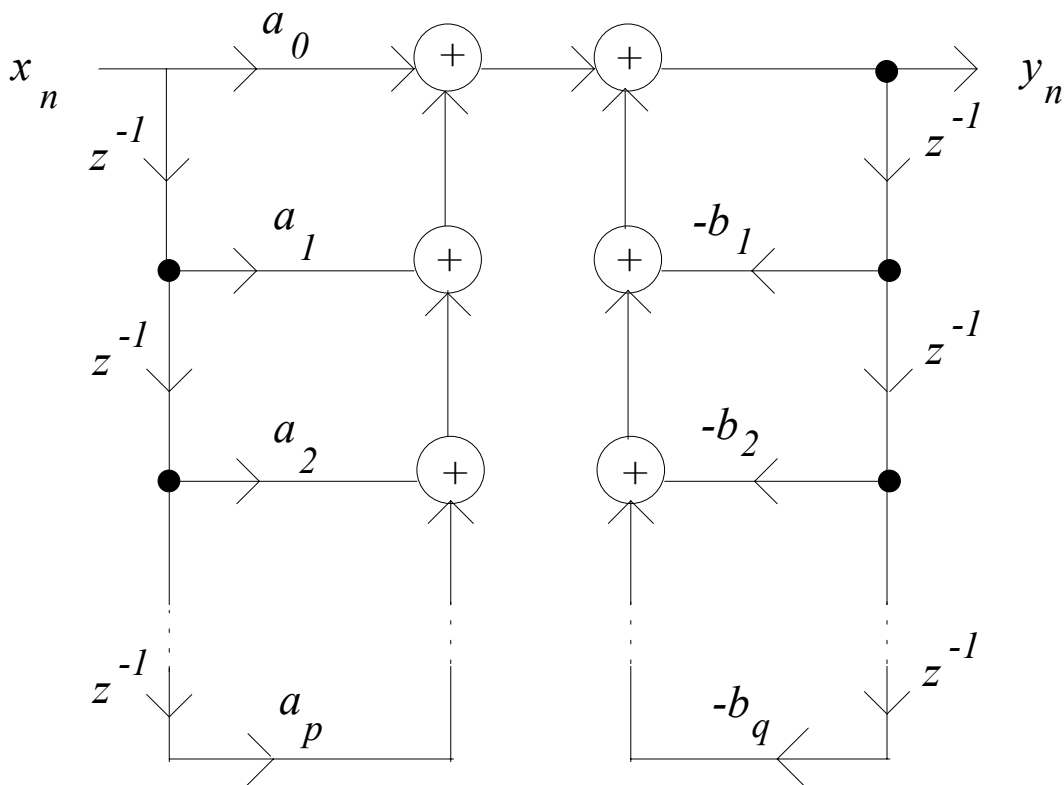
## Structure de réalisation

*Equation aux différences*

$$y_n = \underbrace{\sum_{k=0}^p a_k x_{n-k}}_{\text{Partie MA}} - \underbrace{\sum_{k=1}^q b_k y_{n-k}}_{\text{Partie AR}} \quad (\text{filtre RII causale})$$

Les filtres récurifs sont dits ARMA

*Forme directe de réalisation (schéma-bloc) (block diagram)*



**Stabilité**

$$\text{FT} : y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^q b_k y_{n-k} \xrightarrow{TZ} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

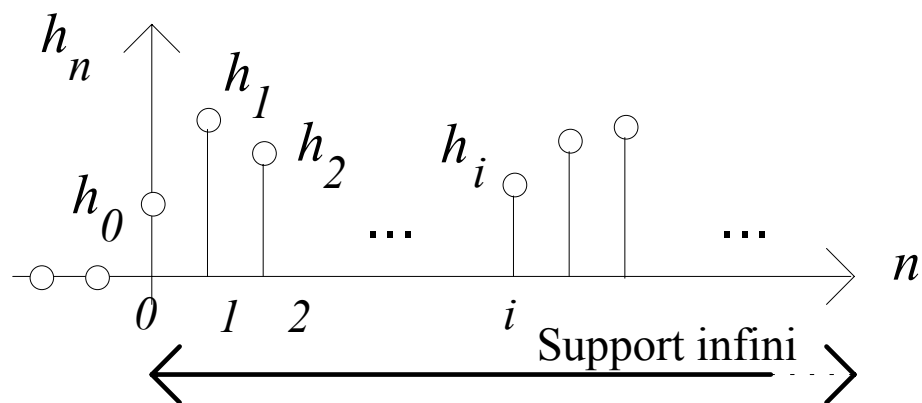
$$\rightarrow \boxed{H(z) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}} : q \text{ pôles}$$

Filtre RII (*causal*) instable si au moins un des pôles de  $H(z)$  a un module  $\geq 1$

**RI**

$$\{h_n\} = TZ^{-1} \left[ H(z) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$$

*Le support de la RI des filtres récursifs est infini (filtres RII) :*



### Réponse indicielle

$$x_n = \Gamma_n \rightarrow D_n = h_n * \Gamma_n \rightarrow D(z) = H(z) \text{TZ}(\Gamma_n) = H(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \xrightarrow{\text{TZ}^{-1}} D_n$$

### Réponse Fréquentielle H(v)

. Séquence  $x(n)$  :

On fait :  $z = e^p$  avec  $p = i2\pi v$  dans la FT

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}$$

$$H(v) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k e^{-i2\pi k v}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-i2\pi k v}}$$

$H(v) \equiv H(e^{i2\pi v})$  périodique (période  $v = 1$ )

. Séquence  $x(nT)$  :

On fait :  $z = e^{pT}$  avec  $p = i2\pi v$  dans la FT

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}$$

$$H(v) = \frac{\sum_{k=0}^p a_k e^{-i2\pi k v T}}{1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-i2\pi k v T}}$$

$H(v) \equiv H(e^{i2\pi v T})$  périodique (période  $v = 1/T$ )

### Filtres RII à phase linéaire

Impossible d'avoir un filtre RII causal à phase linéaire  
 (pas de symétrie de la RI % instant à la demi-séquence, car durée infinie)

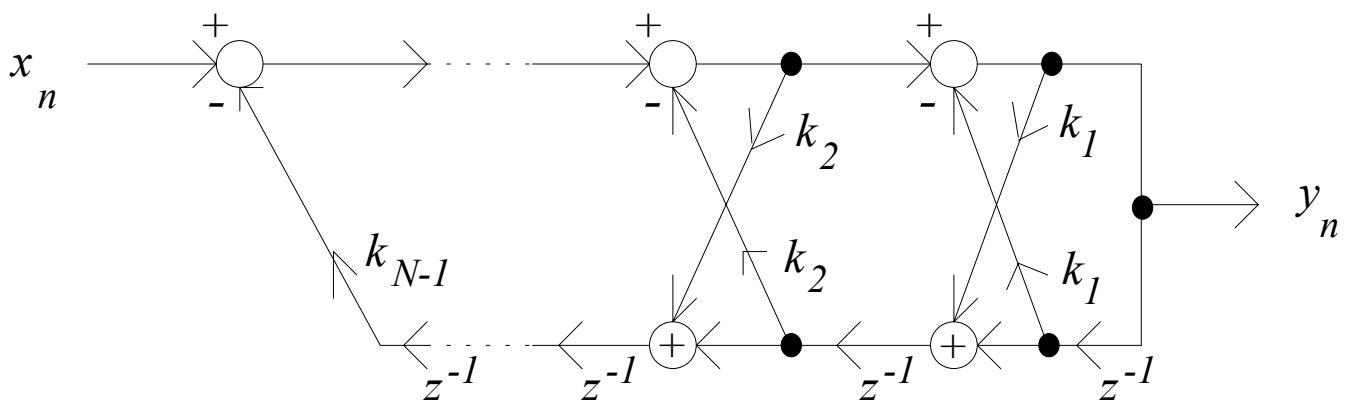
*Par contre* : Possibilité d'avoir un filtre RII *non causal* à phase linéaire  
 (RI paire → filtre RII à déphasage nul)

### Filtres RII en treillis (Lattice filters)

Structure pour réduire le bruit de quantification des paramètres du filtre RII  
 (compensation dûe à la structure croisée)

Structure générale (cas  $a_k \equiv 0$  sauf  $a_0 = 1$ )

$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1}}$$





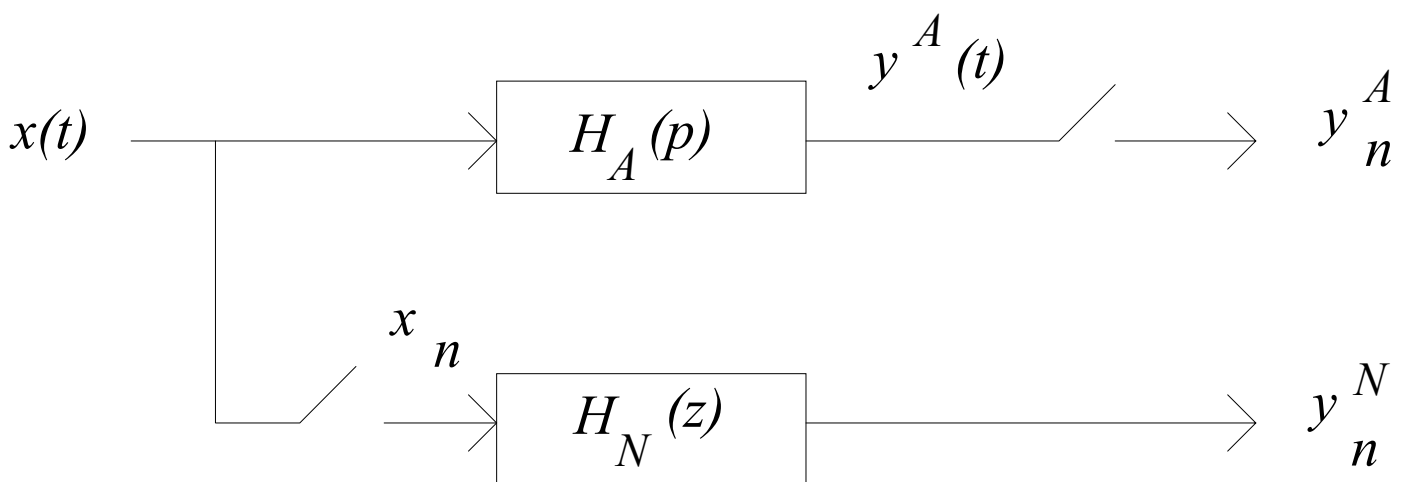
**SYNTHESE DES FILTRES NUMERIQUES RII**

Filtre analogique de FT  $H_A(p)$

Discrétisation du filtre  $\rightarrow H_N(z)$

$\rightarrow$  Filtre récursif

$\rightarrow T$



## Synthèse par la relation de définition

Relation de définition :

$$\left| \begin{array}{l} z = e^p \quad (\text{sequence discrete}) \\ \text{ou : } z = e^{pT} \quad (\text{sequence echantillonnee}) \end{array} \right. \leftrightarrow \left| \begin{array}{l} p = \text{Ln } z \\ \text{ou : } p = \frac{1}{T} \text{Ln } z \end{array} \right.$$

### Non exploitable

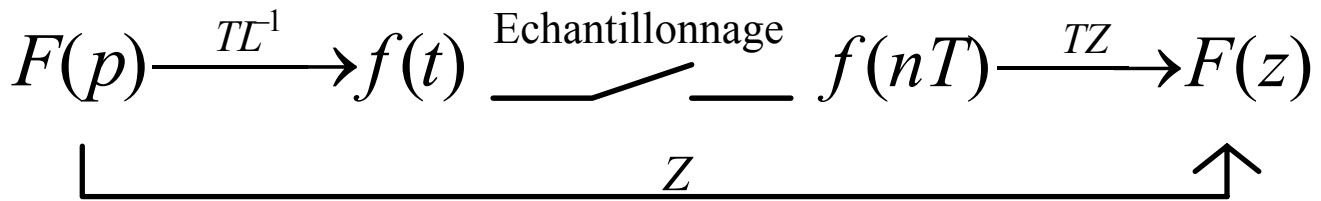
car elle conduit à des filtres numériques non linéaires

*Exemple : Séquences : entrée  $x(n)$  / sortie  $y(n)$*

$$H_A(p) = \frac{1}{p} = \frac{Y(p)}{X(p)} \rightarrow H_N(z) = \frac{1}{\text{Ln } z} = \frac{Y(z)}{X(z)} \rightarrow X(z) = Y(z) \text{Ln } z$$

→ Pas d'équation aux différences **linéaire** :  $y_n = f(x_n)$

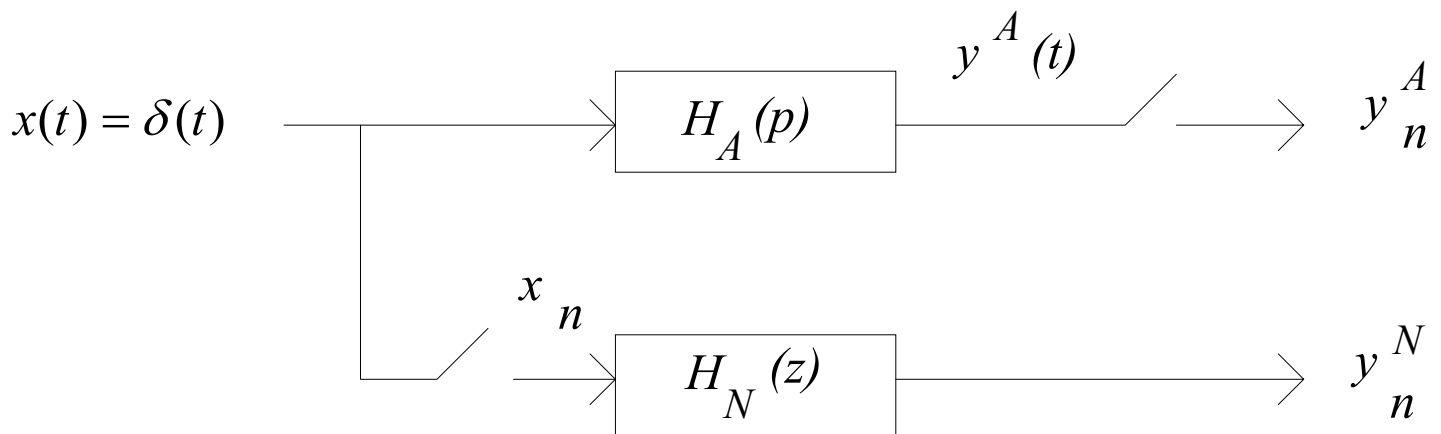
### Synthèse par Invariance Impulsionnelle (≡ Utilisation directe des Tables)



$$H_N(z) = Z[H_A(p)]$$

$$h_N(nT) = h_A(nT) \quad (= h_A(t = nT))$$

$Z[H_A(p)]$  est obtenu avec les tables



$$y_n^N = y_n^A \Leftrightarrow Y^N(z) = Y^A(z) \Leftrightarrow H_N(z)X(z) = Z[H_A(p)X(p)]$$

$$\Leftrightarrow H_N(z) \cdot 1 = Z[H_A(p) \cdot 1] \Leftrightarrow H_N(z) = Z[H_A(p)]$$

*Principal inconvénient de cette méthode :*

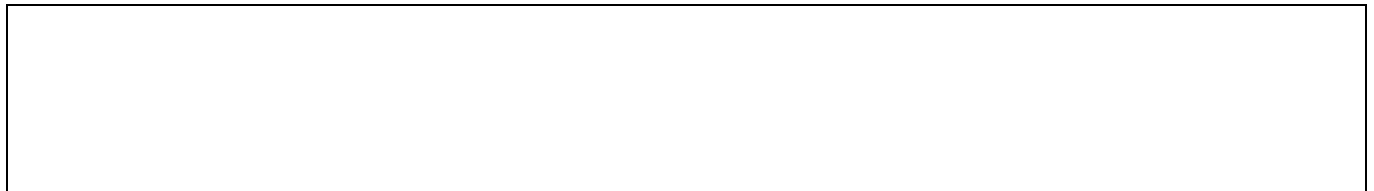
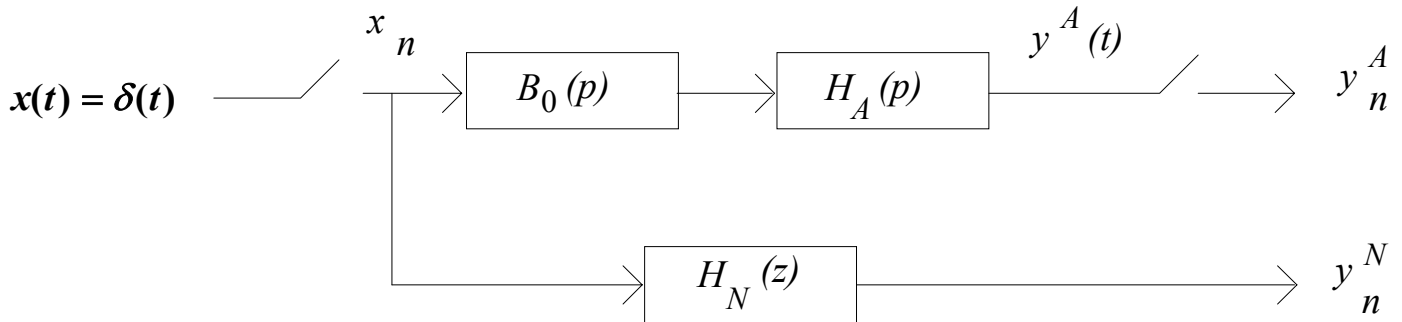
Grande distorsion (déformation) de la RF

(RF : réponse du filtre à une entrée sinusoïdale de fréquence variable)



## Synthèse par invariance indicielle (≡ synthèse par Invariance Impulsionnelle bloquée)

*Synthèse par invariance impulsionnelle bloquée*

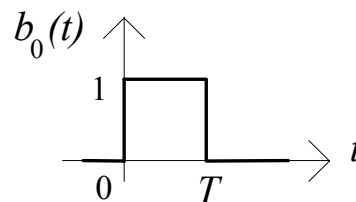


→ 
$$H_N(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right] \quad Z\left[\frac{H_A}{p}\right] \text{ obtenu par les tables}$$

car  $z = e^{pT}$  et 
$$Z\left[\frac{(1 - e^{-pT})}{p} \cdot H_A(p)\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right] \quad (\Delta)$$

( $\Delta$  : cf. explication en fin de paragraphe)

Soit  $b_0(t)$  RI du bloqueur



$$h_N(nT) = (b_0 * h_A)(t = nT) \rightarrow \boxed{h_N(nT) = \int_0^T h_A(nT - \tau) d\tau}$$

$\Delta$ : Explication de la relation 
$$Z\left[\frac{(1 - e^{-pT})}{p} \cdot H_A(p)\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]:$$

$$Z\left[\frac{(1 - e^{-pT})}{p} \cdot H_A(p)\right] = Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right] - Z\left[e^{-pT} \cdot \frac{H_A(p)}{p}\right]$$

Calcul de 
$$Z\left[e^{-pT} \cdot \frac{H_A(p)}{p}\right]:$$

Soit 
$$f(t) = TL^{-1}\left[\frac{H_A(p)}{p}\right] \rightarrow F(p) = \frac{H_A(p)}{p} = TL[f(t)] \quad \text{et}$$

$$F(z) = TZ[f(kT)] = Z[F(p)]$$

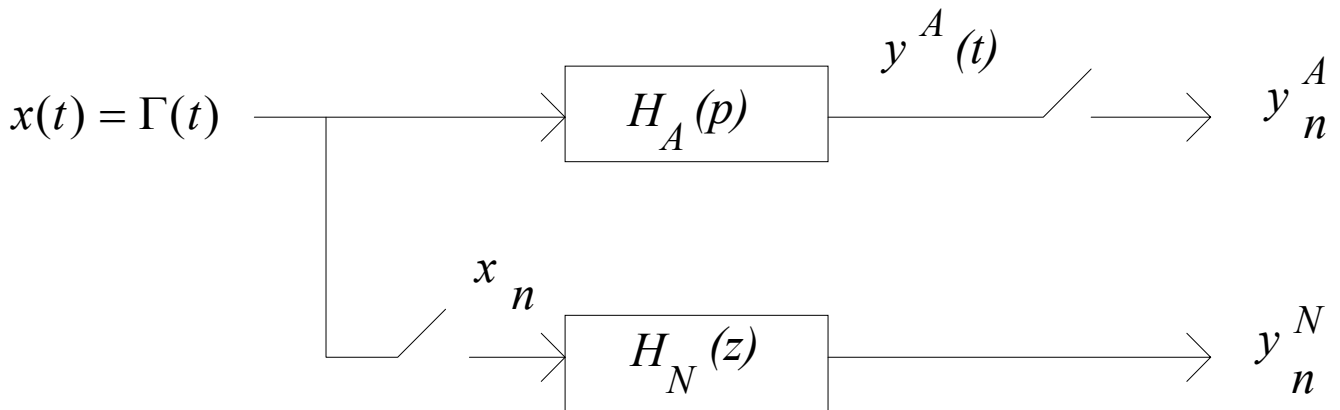
$$e^{-pT} \cdot \frac{H_A(p)}{p} \xrightarrow{TL^{-1}} f(t-T) \quad \swarrow \quad f(kT-T) = f[(k-1)T] \xrightarrow{TZ} z^{-1}F(z) = z^{-1}Z[F(p)]$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_Z \quad \uparrow$

d'où : 
$$Z\left[e^{-pT} \cdot \frac{H_A(p)}{p}\right] = z^{-1} Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]$$

Enfinement : 
$$Z\left[\frac{(1 - e^{-pT})}{p} \cdot H_A(p)\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]$$

*Synthèse par invariance indicielle*



$$x(t) = \Gamma(t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} X(p) = \frac{1}{p} \\ X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y^A(p) = H_A(p) \cdot X(p) \quad \rightarrow \quad Y^A(z) = Z[H_A(p) \cdot X(p)] \\ Y^N(z) = H_N(z) \cdot X(z) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Y^A(z) = Z[H_A(p) \cdot X(p)] = Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right] \\ Y^N(z) = H_N(z) \cdot X(z) = H_N(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \end{cases}$$

$$y_n^N \equiv y_n^A \quad \leftrightarrow \quad Y^N(z) \equiv Y^A(z) \quad \rightarrow \quad \boxed{H_N(z) = (1-z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{H_A(p)}{p}\right]}$$

En Temps :

$$\boxed{h_N(nT) = \int_0^T h_A(nT - \tau) d\tau}$$

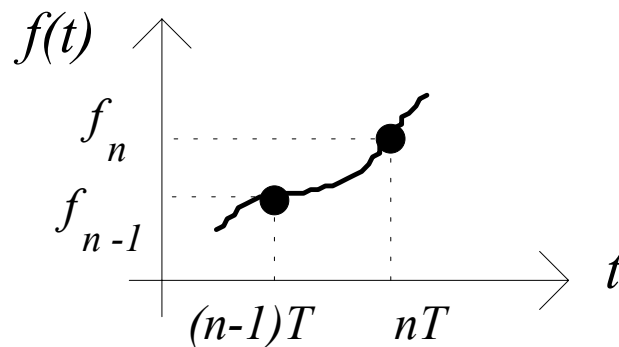
*Inconvénient de la méthode de synthèse :*     Distorsion de la RF

## Synthèse par la Transformation d'Euler (TE) (≡ équivalence de la dérivation)

TC

TD

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow \frac{f_n - f_{n-1}}{T} = \frac{f(nT) - f[(n-1)T]}{T}$$



Approximation d'autant meilleure que  $T$  est faible

$$TL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) \qquad TZ\left[\frac{f_n - f_{n-1}}{T}\right] = F(z) \cdot \frac{(1 - z^{-1})}{T}$$

$$\rightarrow \boxed{p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T}} \qquad \boxed{z = \frac{1}{1 - pT}}$$

*Principal inconvénient de cette synthèse :*      Distorsion de la RI

### Remarques

① Développement en série (au 1er ordre) de la relation exacte  $z = e^{pT}$  :

$$z^{-1} = e^{-pT} \approx 1 - pT$$

→ TE = approximation de la formule exacte  $z = e^{pT}$  au 1er ordre

④ La TE entraîne une relation non linéaire entre les fréquences du domaine analogique ( $p$ ) et celles du domaine numérique ( $z$ )

(*frequency warping* - **distorsion des fréquences**) → correction des fréquences :

Les fréquences caractéristiques du filtre analogique (*ex.*: fréq. de coupure)

vont, par application de la TE :  $p = \frac{1 - z^{-1}}{T}$  subir un léger décalage  
(d'autant moins léger que la période d'échantillonnage  $T$  est élevée)

$$z = e^{pT} = e^{i\omega T} = e^{i2\pi f_N T} \quad (f_N : \text{fréquence Numérique})$$

TE :  $z^{-1} = 1 - pT = 1 - i\omega T = 1 - i2\pi f_A T$  ( $f_A$  : fréquence Analogique)

→  $e^{i2\pi f_N T} = \frac{1}{1 - i2\pi f_A T}$  → égalité des phases :  $2\pi f_N T = \text{Arctg}(2\pi f_A T)$

$$\rightarrow \boxed{f_A = \frac{1}{2\pi T} \text{tg}(2\pi f_N T)} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{f_N = \frac{1}{2\pi T} \text{Arctg}(2\pi f_A T)}$$

ou encore :  $\boxed{\omega_A = \frac{1}{T} \text{tg}(\omega_N T)}$

*Algorithme de numérisation par la Transformation d'Euler*

a) Le gabarit du filtre est donné par la FT du filtre analogique  $H_A(p)$

b)  $T$  est déterminée d'après la condition de Shanonn

c) Corriger chaque fréquence Analogique caractéristique  $f_A$  de  $H_A(p)$   
 ( $f_{A_i}$  = fréquences de coupure, fréquences propres ...)

pour obtenir les fréquences caractéristiques  $f_{N_i}$  Numériques désirées

→ modification de  $H_A(p)$  ( $\equiv$  de chaque fréquence caractéristique  $f_{A_i}$ ) :

$$\left[ f_A \rightarrow \frac{1}{2\pi T} \cdot \text{tg}(2\pi f_N T) \right] \quad \text{ou encore :} \quad \left[ \omega_A \rightarrow \frac{1}{T} \text{tg}(\omega_N T) \right]$$

Les fréquences  $f_{N_i}$  désirées sont en général les  $f_{A_i}$  du filtre analogique

→ on corrige donc simplement en faisant dans  $H_A(p)$  :

$$\boxed{\left[ f_A \rightarrow \frac{1}{2\pi T} \cdot \text{tg}(2\pi f_A T) \right]}$$

d) Utiliser la TE dans  $H_A(p)$  précédemment modifié :  $p \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T}$

On obtient une fonction en  $z$  notée  $F(z)$ . Poser  $H_N(z) = kF(z)$ .

e) Ajuster le gain  $k$  du filtre numérique  $H_N(z)$  comme suit :

*Ajustement du gain du filtre numérique*

On se place en régime harmonique  $\rightarrow p = i2\pi\nu$

- *Rappel*

• **Filtre analogique**  $H_A(p)$  :

- si  $H_A(p)$  est un **passé-bas** :

Gain statique = gain à la fréquence 0 ( $p = i2\pi\nu = 0$  car  $\nu = 0$ )

$\rightarrow$  Gain statique =  $H_A(p)|_{p=0}$  = gain à la fréquence 0

- si  $H_A(p)$  est un **passé-haut** :

Gain à la fréquence  $\infty$  =  $H_A(p = i2\pi\nu)|_{\nu=\infty}$  =  $H_A(p = i\infty)$

• **Filtre numérique**  $H_N(z)$  :

La RF est obtenue pour  $z = e^{i2\pi\nu T}$

RF périodique (période  $\frac{1}{T}$ ) et doit être observée entre  $\nu = 0$  et  $\nu = \frac{1}{2T}$

(la fréquence  $\infty$  analogique devient ici  $\nu = \frac{1}{2T}$ )

→ D'après la relation de définition  $z = e^{pT}$  on a :

- si  $H_N(z)$  est un **passé-bas** :

$$p = i2\pi\nu = 0 \rightarrow z = e^{pT} = 1$$

→ gain statique du filtre numérique =  $H_N(z)|_{z=1}$

- si  $H_N(z)$  est un **passé-haut** :

$$\nu = \frac{1}{2T} \rightarrow p = \frac{i\pi}{T} \rightarrow z = e^{pT} = -1$$

→ gain à la fréquence  $\frac{1}{2T}$  du filtre numérique =  $H_N(z)|_{z=-1}$



- *Procédé d'ajustement du gain du filtre numérique*

- si  $H_A(p)$  est un filtre **passé-bas** :

on ajuste le gain  $k$  du filtre numérique en faisant :

$$\boxed{H_N(z)\Big|_{z=1} = H_A(p)\Big|_{p=0}} \text{ (gain statique)}$$

- si  $H_A(p)$  est un filtre **passé-haut** :

on ajuste  $k$  en faisant :

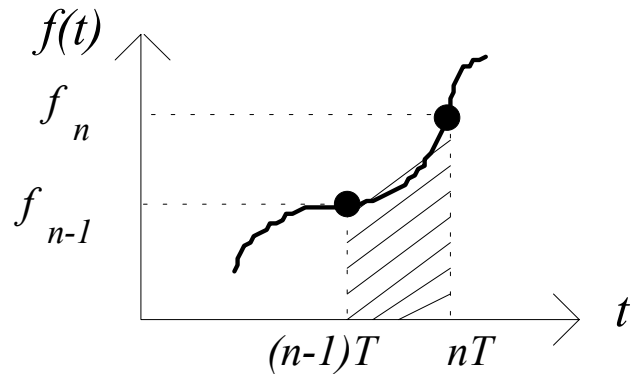
$$\boxed{H_N(z)\Big|_{z=-1} = H_A(p)\Big|_{p=i\infty}}$$

- en dehors de ces 2 catégories de filtre :

l'ajustement du gain est rarement réalisé

## Synthèse par Transformation Bilineaire (TB) (≡ équivalence de l'intégration)

Méthode des trapèzes : équivalence de l'intégration



$$g(t) = \int_0^t f(u) du$$

Passage de  $\mathcal{G}_{n-1}$  à  $\mathcal{G}_n$  : ajouter à  $\mathcal{G}_{n-1}$  la surface hachurée

Surface  $\approx$  trapèze : 
$$\mathcal{G}_n - \mathcal{G}_{n-1} = \frac{(f_n + f_{n-1})}{2} \cdot T \quad (2)$$

TZ(2) : 
$$G(z)[1 - z^{-1}] = F(z)[1 + z^{-1}] \frac{T}{2} \rightarrow \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Intégration en  $p$  : 
$$\frac{G(p)}{F(p)} = \frac{1}{p}$$

$$\rightarrow \boxed{p = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \text{ (TB)} \quad \text{ou encore :} \quad \boxed{z = \frac{1 + p \frac{T}{2}}{1 - p \frac{T}{2}}}$$

*Inconvénient* : Distorsion de la RI et de la réponse indicielle

## Remarques

① Développement en série (au 2nd ordre) de la relation exacte  $z = e^{pT}$  :

$$z = e^{pT} \approx 1 + pT + \frac{p^2 T^2}{2}$$

→ TB = approximation de la formule exacte  $z = e^{pT}$  au 2nd ordre

④ La TB entraîne une relation non linéaire entre les fréquences du domaine analogique ( $p$ ) et celles du domaine numérique ( $z$ )

(*frequency warping* - **distorsion des fréquences**) → correction des fréquences :

Les fréquences caractéristiques du filtre analogique (*ex.*: fréq. de coupure)

vont, par application de la TB :  $p = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$  subir un léger décalage

(d'autant moins léger que la période d'échantillonnage  $T$  est élevée)

$$z = e^{pT} = e^{i\omega T} = e^{i2\pi f_N T} \quad (f_N : \text{fréquence Numérique})$$

$$\text{TB : } z = \left. \frac{1 + p \frac{T}{2}}{1 - p \frac{T}{2}} \right]_{p=i\omega} = \frac{1 + i\omega \frac{T}{2}}{1 - i\omega \frac{T}{2}} = \frac{1 + i\pi f_A T}{1 - i\pi f_A T} \quad (f_A : \text{fréquence Analogique})$$

→ égalité des phases :  $2\pi f_N T = 2 \text{Arctg } \pi f_A T$

$$\rightarrow \boxed{f_A = \frac{1}{\pi T} \cdot \text{tg}(\pi f_N T)} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{f_N = \frac{1}{\pi T} \cdot \text{Arctg}(\pi f_A T)}$$

ou encore :

$$\boxed{\omega_A = \frac{2}{T} \cdot \text{tg}\left(\frac{\omega_N T}{2}\right)}$$

*Algorithme de numérisation par la Transformation Bilinéaire*

Etapes a) b) et e) identiques aux autres méthodes de synthèse notamment la TE

a) Le gabarit du filtre est donné par la FT du filtre analogique

b)  $T$  est déterminée d'après la condition de Shanonn

c) Corriger chaque fréquence Analogique caractéristique  $f_A$  de  $H_A(p)$   
 ( $f_{A_i}$  = fréquences de coupure, fréquences propres ...)

pour obtenir les fréquences caractéristiques  $f_{N_i}$  Numériques désirées

→ modification de  $H_A(p)$  ( $\equiv$  de chaque fréquence caractéristique  $f_{A_i}$ ) :

ou encore :

Les fréquences            désirées sont en général les            du filtre analogique

→ on corrige donc simplement en faisant dans            :



d) Utiliser la TE dans            précédemment modifié :

On obtient une fonction en  $z$  notée            . Poser            .

e) Ajuster le gain            du filtre numérique

## Méthode d'association des pôles et des zéros

(*Matched Transform* - Transformation Adaptée)

On applique les pôles de la FT du système continu  
aux pôles de la FT du systèmes discret

On fait de même avec les zéros de la FT.

L'algorithme de cette méthode de synthèse est le suivant :

*Algorithme de numérisation par association des pôles et des zéros*

*Données* : la FT continue

1. Soient les pôles finis de

On applique ces pôles au domaine selon la formule

→ on obtient ainsi les pôles de la FT :

pour  $i = 1$  à  $q$

2. On fait de même avec les zéros de et

on obtient les zéros pour  $i = 1$  à  $m$

3. Ajustement du gain :

- pour un filtre passe-bas ( ), on pose :

- pour un filtre passe-haut ( ), on pose :

*Exemple :* Filtre passe-bas :

- Il y a 1 pôle qui est appliqué à

On a donc :

- Ajustement du gain  $k$  (*ici gain statique*)

**TABLE DES CORRESPONDANCES EN Z ET LAPLACE  
PAR SYNTHÈSE PAR INVARIANCE INDICIELLE  
(FONCTIONS CAUSALES)**

--	--

---