TRAITEMENT DU SIGNAL

0. PREAMBULE Plan du cours

1. Signaux déterministes. Signaux aléatoires. Systèmes stochastiques
SYSTEMES STOCHASTIQUES
Transmission d'un signal aléatoire dans un système linéaire
Processus générateur de signal aléatoire, filtre formeur AR, MA, ARMA

2. Synthèse du signal. Identification
Synthèse du signal : SIGNAUX DETERMINISTES, ALEATOIRES)
Identification (MODELES AR, MA ARMA)

3. Caractérisation (Analyse). Estimation
TRANSFORMATIONS FREQUENTIELLES
ANALYSE CEPSTRALE - ANALYSE LPC
ANALYSE SPECTRALE (Estimateurs de corrélation, de DSP)

4. Conditionnement - Filtrage. Détection
CONDITIONNEMENT (Préaccentuation / Désaccentuation)
DETECTION (Filtrage adapté)

5. Transmission
CODAGE - DECODAGE (MODULATION - DEMODULATION)
EGALISATION
EXTRACTION DE SIGNAL IMMERGE DANS DU BRUIT
FILTRAGE ADAPTATIF

6. Prédiction
PREDICTION LINEAIRE

7. Filtrage optimal
MOINDRES CARRES

Bibliographie

G. Blanchet / M. Charbit « Traitement numérique du signal » *Hermès*
Y. Thomas « Signaux & systèmes linéaires » *Masson*

1. Signaux déterministes. Signaux aléatoires. Systèmes stochastiques

I. SIGNAUX DETERMINISTES

CONVOLUTION - REPONSE IMPULSIONNELLE (RI)

TC :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

SLS

TD :

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

SLS

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

FONCTION DE TRANSFERT (FT)

TC :

$$X(\nu) \longrightarrow \boxed{H(\nu)} \longrightarrow Y(\nu)$$

SLS

TD :

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

SLS

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$U(\nu) = TF[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i2\pi\nu t}dt$$

$$U(z) = TZ[u(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n}$$

CORRELATION

TC :

$$\varphi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau$$

$$\boxed{\varphi_{xy}(t) = \varphi_{yx}(-t)}$$

$$\boxed{\varphi_{xy}(t) = x(-t) * y(t)}$$

TD :

$$\varphi_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n+k)$$

$$\boxed{\varphi_{xy}(n) = \varphi_{yx}(-n)}$$

$$\boxed{\varphi_{xy}(n) = x(-n) * y(n)}$$

II. SIGNAUX ALEATOIRES

VA discrètes et continues

. Moyenne m **d'une VA** X

$$m_X = E[X]$$

. Variance σ^2 **d'une VA** X

$$\sigma_x^2 = \mathrm{var}[X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] = E\left[X^2\right] - E^2[X]$$

. Ecart-type σ **d'une VA** X

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{var}[X]}$$

. Covariance φ_{xy} **de 2 VA** X **et** Y

$$\varphi_{xy} = \mathrm{cov}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

. Autocovariance φ_{xx} **d'une VA** X **(≡ variance)**

$$\varphi_{xx} = \mathrm{cov}[X, X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \sigma_x^2$$

. Corrélation ρ_{xy} **de 2 VA** X **et** Y

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{var}[X]}\,\sqrt{\mathrm{var}[Y]}} = \frac{\varphi_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

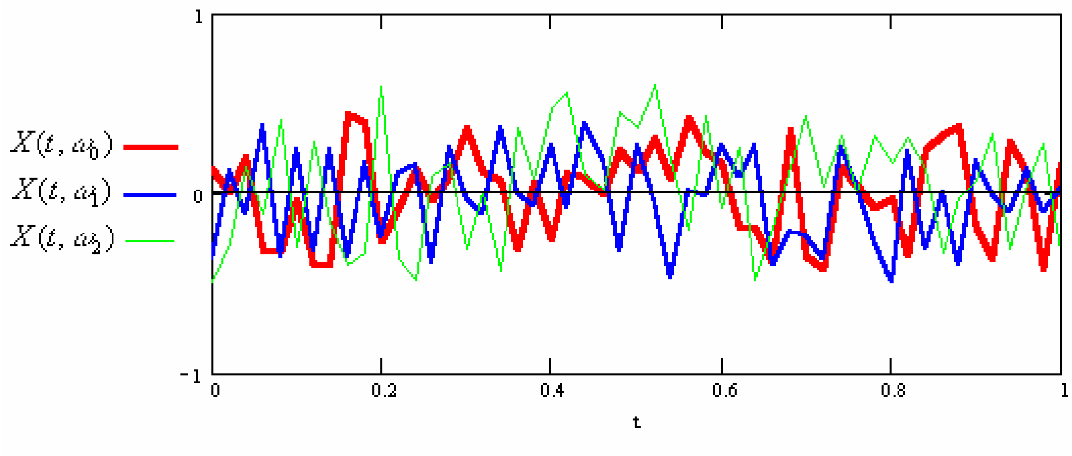
. Autocorrélation ρ_{xx} **d'une VA** X

$$\rho_{xx} = \frac{\mathrm{cov}[X, X]}{\mathrm{var}[X]} = \frac{\varphi_{xx}}{\sigma_x^2} = 1$$

Processus aléatoires

Une **réalisation** n'est pas une valeur (VA) mais une **fonction du temps**

Trajectoire d'un Processus Aléatoire = Réalisations du PA



Processus aléatoires à Temps Continu et à Temps Discret

Stationnarité du 2nd ordre au sens large (SSL) des processus aléatoires

Un Processus Aléatoire $X(t)$ est *SSL* s'il vérifie les 2 propriétés 1 et 2 :

1. la *moyenne* du Processus Aléatoire SSL est indépendante de t :

$$m_X(t) = m_X \qquad \boxed{m_X = E[X(t)]}$$

2. la *fonction d'autocovariance* d'un PA SSL ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau) \qquad \boxed{R_{XX}(\tau) = E[X(t-\tau)X(t)]}$$ si $X(t)$ centré

on a aussi : $$\boxed{R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]}$$

$$\boxed{R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)}$$ $R_{XX}(\tau)$ est paire

Fonction de Covariance $R_{XY}(\tau)$ de 2 PA SSL $X(t)$ et $Y(t)$

. la *fonction de Covariance* de 2 PA SSL ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$:

$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau)$ $\boxed{R_{XY}(\tau) = E[X(t-\tau)Y(t)]}$ $X(t), Y(t)$ centrés

On a aussi $X(t), Y(t)$ centrés : $\boxed{R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]}$

$$\boxed{R_{YX}(\tau) = E[Y(t-\tau)X(t)] = R_{XY}(-\tau)}$$

Densité Spectrale de Puissance (DSP) d'un Processus Aléatoire $X(t)$

. Puissance P $P_X \overset{\Delta}{=} E\left[X^2(t)\right] = R_{XX}(0) + m_X^2$

$\boxed{P_X = R_{XX}(0)}$ (PA centrés)

. DSP ou spectre S $\boxed{S_X(f) \overset{\Delta}{=} TF\left[R_{XX}(\tau)\right]}$ f est la fréquence

Bruit blanc

Bruit blanc de variance σ^2 *:*

Autocovariance :

TC : $R_{BB}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$ TD : $R_{BB}(k) = \sigma^2 \delta_{k,0}$

DSP (TC) / Variance (TD) :

TC : $S_B(f) = TF\left[R_{BB}(\tau)\right] = \sigma^2$ TD : $S_B(f) = TF\left[R_{BB}(k)\right] = \sigma^2$

*L*es différentes réalisations d'un processus *blanc* sont *indépendantes*

Ergodicité

$$\boxed{\begin{cases} m_X = \lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{2T+1} \sum\limits_{t=-T}^{T} X(t) \\ R_{XX} = \lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{2T+1} \sum\limits_{t=-T}^{T} X(t+\tau) X(t) \end{cases}}$$

moyenne statistique $\hat{m}_X(t) = \dfrac{1}{K} \sum\limits_{k=1}^{K} x_k(t) =$ *moyenne temporelle* $\hat{m}_X = \dfrac{1}{T} \sum\limits_{t=0}^{T-1} X(t)$

Stationnarité et ergodicité d'un Processus Aléatoire

$$\boxed{\begin{cases} \hat{m}_X = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} X(t) \\ R_{XX} = \dfrac{1}{T-\tau}\displaystyle\sum_{t=0}^{T-\tau-1} X^0(t+\tau)X^0(t) \end{cases}}$$

où : $X^0(t) = X(t) - \hat{m}_X$

Formule du filtrage

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$$

. Moyenne de $Y(t)$ $\boxed{m_Y = H(0)\, m_X}$ $X(t)$ centré $\rightarrow$ $Y(t)$ centré

. DSP de $Y(t)$ $\boxed{S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)}$

. Interspectre $\boxed{S_{YX}(f) \overset{\Delta}{=} H(f)\, S_X(f)}$

III. SYSTEMES STOCHASTIQUES

Transmission d'un signal aléatoire dans un système linéaire

TC :

$$X(t) \;—\; \boxed{H(s)} \;—\; Y(t)$$

TD :

$$X_n \;—\; \boxed{H(z)} \;—\; Y_n$$

Valeur moyenne de la sortie

$$\boxed{\overline{Y} = \overline{X} * h(t)}$$

$$\boxed{E[Y_n] = \overline{X} * h_n}$$

Démonstration (TC) :

$$Y(t) = X(t) * h(t) \;\rightarrow\; E[Y(t)] = E[X(t) * h(t)] = E[X(t)] * h(t)$$

Intercorrélation

TC :

$$\varphi_{xy}(\tau) = E[X(t-\tau)Y(t)] = E[X(t-\tau)\{X(t)*h(t)\}] = E\left[X(t-\tau)\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)du\right]$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,E[X(t-\tau)X(t-u)]du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,\varphi_{xx}(\tau-u)du = \varphi_{xx}(\tau)*h(\tau)$$

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau)*\varphi_{xx}(\tau)} \xrightarrow{TL} \boxed{\Phi_{XY}(s) = H(s)\cdot\Phi_{XX}(s)}$$

TD : $\boxed{\varphi_{xy\,k} = h_k * \varphi_{xx\,k}} \xrightarrow{TZ} \boxed{\Phi_{XY}(z) = H(z)\cdot\Phi_{XX}(z)}$

Autocorrélation et DSP (Densité Spectrale de Puissance)

TC :

$$\varphi_{yy}(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t+\tau-u)du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(v)X(t-v)dv\right]$$

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)E[X(t+\tau-u)X(t-v)]dudv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\varphi_{xx}(\tau-u+v)dudv$$

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\varphi_{xx}(\tau-u+v)dudv \xrightarrow{TL} \Phi_{YY}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\varphi_{xx}(\tau-u+v)e^{-s\tau}dudvd\tau$$

soit en posant $\tau - u + v = \lambda$: $\Phi_{YY}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-su}du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{sv}dv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda$

d'où : $\boxed{\Phi_{YY}(s) = H(s)\cdot H(-s)\cdot\Phi_{XX}(s)} \xrightarrow{TL^{-1}} \boxed{\varphi_{yy}(\tau) = h(\tau)*h(-\tau)*\varphi_{xx}(\tau)}$

$s = j\omega \rightarrow$ DSP : $\boxed{\Phi_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2\cdot\Phi_{XX}(\omega)}$ ou $S_Y(f) = |H(f)|^2\cdot S_X(f)$

TD : $\varphi_{yy\,k} = \sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_u h_v \varphi_{xx\;k-u+v} \xrightarrow{TZ} \boxed{\Phi_{YY}(z) = H(z)\cdot H(z^{-1})\cdot\Phi_{XX}(z)}$

$$\Phi_{YY}(z) = H(z)\cdot H(z^{-1})\cdot\Phi_{XX}(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} \boxed{\varphi_{yy\,k} = h_k * h_{-k} * \varphi_{xx\,k}}$$

Processus générateur d'un signal aléatoire : filtres formeurs du 1er ordre

$$X_n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y_n$$

Bruit blanc **Filtre formeur** **Signal aléatoire**

$\rightarrow$ Description du signal = paramètres du filtre + variance du bruit blanc

Processus générateurs : MA, AR, ARMA

TD : $$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

$$X_n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y_n$$

Bruit blanc **Filtre MA, AR, ARMA**

A partir de φ_{yy_k} $\rightarrow$ trouver les paramètres a_i et b_i du filtre $H(z)$ qui génère $\{Y_n\}$ à partir de $\{X_n\}$, bruit blanc de variance à déterminer.

Signal AR

$$X_n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y_n$$

Bruit blanc **Filtre AR**

Hypothèses : $$\left| \begin{array}{l} E[X_n] = 0 \\ E[X_n^2] = V \\ E[X_n \cdot X_{n+k}] = 0 \quad \forall k \neq 0 \end{array} \right. \equiv \left| \begin{array}{l} E[X_n] = 0 \\ \varphi_{xx\,k} = E[X_n \cdot X_{n+k}] = V\delta_{k,0} \end{array} \right.$$

($\{X_n\}$ bruit blanc centré de variance V)

et : $$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)\left[1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}\right] = X(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} Y_n = X_n - \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i}$$

$$\varphi_{xx\,k} = V\delta_{k,0} \text{ et } \varphi_{xy\,k} = h_k * \varphi_{xx\,k} \rightarrow \varphi_{xy\,k} = h_k * \left(V\delta_{k,0}\right) = V\left(h_k * \delta_{k,0}\right) = V \cdot h_k$$

$$\rightarrow \boxed{h_k = \frac{\varphi_{xy\,k}}{V}} \quad h_k = \frac{\varphi_{xy\,k}}{V} = \frac{E\left[X_{n-k}Y_n\right]}{V} = \frac{E\left[\left(Y_{n-k} + \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-k-i}\right)Y_n\right]}{V} \text{ car } X_n = Y_n + \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i}$$

$$\rightarrow \boxed{h_k = \frac{\varphi_{yy\,k} + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,k+i}}{V}} \rightarrow \varphi_{yy\,k} = V \cdot h_k - \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,k+i}$$

. Moyenne de $\{Y_n\}$ **:** $m = E\left[Y_n\right] = 0$ (car bruit blanc d'entrée centré)

. Autocorrélation de $\{Y_n\}$ **:** $\varphi_{yy\,k} = E\left[Y_{n-k}Y_n\right] = ?$

$$\varphi_{yy\,k} = V \cdot h_k - \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,k+i} \rightarrow \boxed{\varphi_{yy\,k} = V \cdot h_{-k} - \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,k-i}} \text{ car autocorrélation paire.}$$

. $k = 0$:

$$Y_n = X_n - \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i} \rightarrow h_n = \delta_n - \sum_{i=1}^{N} a_i h_{n-i} \rightarrow h_0 = 1 \rightarrow \boxed{\varphi_{yy\,0} = V - \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,i}}$$

. $k > 0$:

$$\varphi_{yy\,k} = -\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,k-i} \text{ car } h_{-k} \equiv 0 \text{ pour } k > 0 \text{ (filtre } h_n \text{ causal } Y_n = X_n - \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i}\text{)}$$

On a aussi : $\boxed{\varphi_{yy\,k} = -\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,i-k}}$ car autocorrélation paire.

Ces équations peuvent s'écrire :

$$\left|\begin{array}{l}\varphi_{yy_0}+\sum_{i=1}^{N}a_i\varphi_{yy_i}=V\\ \varphi_{yy_1}+\sum_{i=1}^{N}a_i\varphi_{yy_{i-1}}=0\\ \cdots\\ \varphi_{yy_N}+\sum_{i=1}^{N}a_i\varphi_{yy_{N-i}}=0\end{array}\right. \quad\leftrightarrow \text{ pour } 0\le k\le N:\ \sum_{n=0}^{N}\varphi_{yy_{k-n}}a_n=\begin{cases}V & \text{si } k=0\\ 0 & \text{si } 1\le k\le N\end{cases}\ (a_0=1)$$

soit, sous forme matricielle : ce sont les équations de **Yule-Walker** :

$$\begin{bmatrix}\varphi_{yy_0} & \varphi_{yy_1} & \cdots & \varphi_{yy_N}\\ \varphi_{yy_1} & \varphi_{yy_0} & \cdots & \varphi_{yy_{N-1}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi_{yy_N} & \varphi_{yy_{N-1}} & \cdots & \varphi_{yy_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ a_1\\ \vdots\\ a_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{noté : } \boxed{\mathbf{R}\,\underline{a}=\underline{v}}$$

Résolution : à partir des données $\{Y_n\}$ $\rightarrow$ déterminer les $N+1$ inconnues :

Variance V du bruit blanc d'entrée et les paramètres a_i du filtre formeur

Méthodes de résolution :

. inversion matricielle
. algorithme itératif rapide de **Levinson**
. méthode de **Burg**

Signal MA

$$X_n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y_n$$

Bruit blanc **Filtre MA**

Equations $\boxed{\varphi_{yy_k} = V \sum_{i=0}^{N-k} h_i h_{k+i}}$ non linéaires en les paramètres $\{h_i\}$ du filtre

$\rightarrow$ algorithme de PNL pour obtenir la séquence $\{h_i\}$ à partir de la séquence $\{\varphi_{yy_k}\}$

ANNEXE

. ESTIMATION DE LA COVARIANCE

. INVERSION MATRICIELLE *Résolution du système de Yule-Walker*

. ALGORITHME DE LEVINSON *Résolution du système de Yule-Walker*

. METHODE DE BURG *Résolution du système de Yule-Walker*

ESTIMATION DE LA COVARIANCE

Objectif : déterminer la fonction d'autocovariance φ_{XX_k} , notée aussi souvent R_{XX_k} , d'un signal aléatoire (ou pas) x_k à partir de la séquence $\{x_k\}$ des échantillons du signal.

Ergodicité

Soit X_n un processus aléatoire à TD.

$$\begin{cases} \hat{m} = \langle X \rangle = \dfrac{1}{K} \displaystyle\sum_{n=0}^{K-1} X_n \\ \hat{R}_{XX_k} = \dfrac{1}{K-k} \displaystyle\sum_{n=0}^{K-k-1} X_{n+k}^0 X_n^0 \end{cases}$$

K durée d'observation : doit être le plus élevé possible
X_n^0 est le processus centré : $X_n^0 = X_n - \hat{m}$

Calcul direct *Cas* X_n *réel*

Méthode des corrélations :

$$\begin{bmatrix} R_{XX_0} \\ \vdots \\ R_{XX_N} \end{bmatrix} = \frac{1}{K}\mathbf{D}\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{K-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{K-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_0 & x_1 & \cdots & x_{K-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_0 & x_1 & \cdots & x_{K-1} \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Matrice de covariance} = \boxed{\frac{1}{K}\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}}$$

Quand la taille K de l'observation est faible on lui préfère la *méthode des covariances*

Méthode des covariances :

$$\begin{bmatrix} R_{XX_0} \\ \vdots \\ R_{XX_N} \end{bmatrix} = \frac{1}{K}\mathbf{D}\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{K-N-1} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{K-N-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{K-N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & x_{N+1} & \cdots & x_{K-1} \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Matrice de covariance} = \boxed{\frac{1}{K-N-1}\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}}$$

Toutes ces méthodes donnent sensiblement les mêmes résultats si $K >> N$.

RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS DE YULE-WALKER PAR INVERSION MATRICIELLE

$$\begin{bmatrix} \varphi_{yy\,0} & \varphi_{yy\,1} & \cdots & \varphi_{yy\,N} \\ \varphi_{yy\,1} & \varphi_{yy\,0} & \cdots & \varphi_{yy\,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{yy\,N} & \varphi_{yy\,N-1} & \cdots & \varphi_{yy\,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{R}\,\underline{a} = \underline{v}$$

avec : $$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \varphi_{yy\,0} & \varphi_{yy\,1} & \cdots & \varphi_{yy\,N} \\ \varphi_{yy\,1} & \varphi_{yy\,0} & \cdots & \varphi_{yy\,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{yy\,N} & \varphi_{yy\,N-1} & \cdots & \varphi_{yy\,0} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ $\boxed{\underline{\alpha} = -\dfrac{1}{\varphi_{yy\,0}} \mathbf{R}^{-1}\,\underline{b}}$ avec $\underline{\alpha} \stackrel{\Delta}{=} \dfrac{1}{V}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}$ et $\underline{b} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_{yy\,1} \\ \vdots \\ \varphi_{yy\,N} \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ $\boxed{V = \dfrac{\varphi_{yy\,0}}{\varphi_{yy\,0}\alpha_0 + 1}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}}$
