2. Synthèse du signal. Identification

Synthèse du signal

I. SIGNAUX DETERMINISTES

Génération de signal déterministe :

. par l'*expression analytique* (formule) du signal
. par un *modèle* (exemple : modèle AutoRégressif (AR))
. par une *table de look-up* (fichier mémoire)
. par *Transformation mathématique inverse* (Fourier, Laplace ...)

Exemple : *Génération d'un signal sinusoïdal (sans phase initiale)*

. Expression analytique :

Génération d'un signal sinusoïdal de fréquence f et d' amplitude A

à TC : $x(t) = A \cdot \sin(2\pi f t)$

Signal x généré en se donnant $N = \frac{F}{f}$ échantillons par période ($\frac{1}{f}$)

$F = \frac{1}{T}$: fréquence d'échantillonnage

F doit vérifier la condition de Shannon : $F \geq 2f$

$$\boxed{x(n) = A\sin(2\pi f n T)} \qquad n \in \mathbf{Z}$$

. Modèle :

Rappel : Modèle AR : $$x(n) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, x(n-i)$$

Génération d'un signal sinusoïdal de fréquence f et d'amplitude 1

Modèle AR d'ordre N = 2: $$\boxed{x(n) = \alpha \, x(n-1) + \beta \, x(n-2)}$$

Coeffs : $$\left| \begin{array}{l} \alpha = 2\cos(2\pi f T) \\ \beta = -1 \end{array} \right.$$

Init : $\left| \begin{array}{l} x(0) = \varphi \quad \text{(phase initiale)} \\ x(1) = \sin(2\pi fT) \\ \text{si on veut une phase initiale non nulle} \end{array} \right.$ $\left| \begin{array}{l} x(0) = 0 \quad \text{(phase initiale)} \\ x(1) = \sin(2\pi fT) \\ \text{si on veut une phase initiale nulle} \end{array} \right.$

$x(n)$ représente le signal sinusoïdal à l'instant nT .

. Table de look-up : *Fichier mémoire*

. Transformation mathématique inverse (Laplace) :

Génération d'un signal sinusoïdal de fréquence f et d' amplitude 1

$$X(p) = \frac{2\pi f}{p^2 + (2\pi f)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} x(t) = \sin(2\pi f t)$$ (tables)

II. SIGNAUX ALEATOIRES

Signaux aléatoires par fonction modulo

Signal aléatoire à distribution uniforme. Bruit blanc uniforme

$$x(n) = A\,x(n-1) \text{ modulo } P$$

Init : $x(0)$ doit vérifier : $0 < x(0) < P$

On a : $0 < x(n) < P$

(Pour avoir $0 < x(n) < 1$, on divise ensuite chaque terme par P).

Le signal généré est pseudo-aléatoire car périodique de période P .

P doit être premier pour que le résultat du modulo ne soit pas nul.

On peut prendre par ex. : $x(0) = 100$, $A = 281$, $P = 31357$

Echantillons indépendants les uns des autres $\rightarrow$ **Bruit blanc** *uniforme*.

Identification *(modélisation)*

Processus générateur de signal aléatoire : filtre formeur du 1er ordre

$$X_n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y_n$$

Bruit blanc **Filtre formeur** **Signal aléatoire**

$\rightarrow$ Description du signal = paramètres du filtre + variance du bruit blanc

Processus générateurs : MA, AR, ARMA

TD : $$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

$$X_n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y_n$$

Bruit blanc **Filtre MA, AR, ARMA**

A partir de φ_{yy_k} $\rightarrow$ trouver les paramètres a_i et b_i du filtre $H(z)$ qui génère $\{Y_n\}$ à partir de $\{X_n\}$, bruit blanc de variance à déterminer.

Rappel: **Modèle AR :** $$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} \quad \rightarrow \quad Y_n = X_n - \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i}$$

Modèle MA : $$H(z) = \sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i} \quad \rightarrow \quad Y_n = \sum_{i=0}^{N} b_i X_{n-i}$$

Modèle ARMA : $$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} \quad \rightarrow \quad Y_n = \sum_{i=0}^{N} b_i X_{n-i} - \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i}$$

Signal AR

$$X_n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y_n$$

Bruit blanc **Filtre AR**

Hypothèses : $\left| \begin{array}{l} E[X_n]=0 \\ E[X_n^2]=V \\ E[X_n \cdot X_{n+k}]=0 \quad \forall k \neq 0 \end{array} \right. \equiv \left| \begin{array}{l} E[X_n]=0 \\ \varphi_{xx\,k} = E[X_n \cdot X_{n+k}] = V\delta_{k,0} \end{array} \right.$

($\{X_n\}$ bruit blanc centré de variance V)

et : $H(z) = \dfrac{1}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

On a vu (Système d'équations de Yule-Walker) :

$$Y(z)\left[1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}\right] = X(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} Y_n = X_n - \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i}$$

$\varphi_{xx\,k} = V\delta_{k,0}$ et $\varphi_{xy_k} = h_k * \varphi_{xx\,k} \rightarrow \varphi_{xy_k} = h_k * (V\delta_{k,0}) = V(h_k * \delta_{k,0}) = V \cdot h_k$

$$\rightarrow \boxed{h_k = \frac{\varphi_{xy_k}}{V}} \quad h_k = \frac{\varphi_{xy_k}}{V} = \frac{E[X_{n-k} Y_n]}{V} = \frac{E\left[\left(Y_{n-k} + \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-k-i}\right) Y_n\right]}{V}$$ car $X_n = Y_n + \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i}$

$$\rightarrow \boxed{h_k = \frac{\varphi_{yy_k} + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy_{k+i}}}{V}} \rightarrow \varphi_{yy_k} = V \cdot h_k - \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy_{k+i}}$$

. Autocorrélation de $\{Y_n\}$: $\varphi_{yy\,k} = E[Y_{n-k}Y_n] = ?$

$$\varphi_{yy\,k} = V \cdot h_k - \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,k+i} \rightarrow \boxed{\varphi_{yy\,k} = V \cdot h_{-k} - \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,k-i}}$$ car autocorrélation paire

. $k = 0$:

$$Y_n = X_n - \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i} \rightarrow h_n = \delta_n - \sum_{i=1}^{N} a_i h_{n-i} \rightarrow h_0 = 1 \rightarrow \boxed{\varphi_{yy\,0} = V - \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,i}}$$

. $k > 0$:

$\varphi_{yy\,k} = -\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,k-i}$ car $h_{-k} \equiv 0$ pour $k > 0$ (filtre h_n causal $Y_n = X_n - \sum_{i=1}^{N} a_i Y_{n-i}$)

On a aussi : $\boxed{\varphi_{yy\,k} = -\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,i-k}}$ car autocorrélation paire.

Ces équations peuvent s'écrire :

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_{yy\,0} + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,i} = V \\ \varphi_{yy\,1} + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,i-1} = 0 \\ \cdots \\ \varphi_{yy\,N} + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy\,N-i} = 0 \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \text{ pour } 0 \le k \le N : \sum_{n=0}^{N} \varphi_{yy_{k-n}} a_n = \begin{cases} V & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \le k \le N \end{cases} \quad (a_0 = 1)$$

soit, sous forme matricielle : ce sont les équations de **Yule-Walker** :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{yy\,0} & \varphi_{yy\,1} & \cdots & \varphi_{yy\,N} \\ \varphi_{yy\,1} & \varphi_{yy\,0} & \cdots & \varphi_{yy\,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{yy\,N} & \varphi_{yy\,N-1} & \cdots & \varphi_{yy\,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

noté : $\boxed{\mathbf{R}\,\underline{a} = \underline{v}}$

Relations entre coeffs du modèle et covariances (cas $N = 1$:1er ordre)

Prenons pour exemple le processus AR d'ordre $N = 1$ à TD engendré par :

$x_n + a_1 x_{n-1} = w_n$ avec $|a_1| < 1$ pour assurer la stabilité du filtre.

Calculons la **fonction d'autocovariance** $R_{XX_k} = E[X_{n+k} X_n]$ de X_n :

(*Rappel :* bruit blanc de variance σ^2 : $E[W_{n+k} W_n] = \sigma^2 \delta_{n,k}$ et R_{XX_k} paire)

Comme : $x_n = w_n - a_1 x_{n-1}$

on a : $x_n^2 = x_n w_n - a_1 x_n x_{n-1} = (w_n - a_1 x_{n-1}) w_n - a_1 x_n x_{n-1}$

$\rightarrow$ $x_n^2 = w_n^2 - a_1 x_{n-1} w_n - a_1 x_n x_{n-1}$

Comme il n'y a pas de dépendance causale entre x_{n-1} et w_n

(x_{n-1} est fonction de w_{n-1}, w_{n-2}, ...)

Comme w_{n-1}, w_{n-2}, ... sont indépendants de w_n (bruit blanc)

$\rightarrow$ x_{n-1} et w_n sont indépendants donc non corrélés, ce qui s'écrit :

$E[X_{n-1} W_n] = E[X_{n-1}] E[W_n] = 0$ (car le bruit blanc est centré)

on a : $E[X_n^2] = E[W_n^2] - a_1 E[X_n X_{n-1}]$ soit : $\boxed{R_{XX_0} = \sigma^2 - a_1 R_{XX_1}}$

On a aussi $x_n x_{n-1} = x_{n-1} w_n - a_1 x_{n-1}^2$ $\rightarrow$ $E[X_n X_{n-1}] = -a_1 E[X_{n-1}^2]$

soit : $\boxed{R_{XX_1} = -a_1 R_{XX_0}}$

On a donc le système d'équations : $\begin{cases} R_{XX_0} + a_1 R_{XX_1} = \sigma^2 \\ R_{XX_1} + a_1 R_{XX_0} = 0 \end{cases}$

Ce système linéaire d'équations peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{R}\,\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{v}}$$ avec :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{XX_0} & R_{XX_1} \\ R_{XX_1} & R_{XX_0} \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad a_0 = 1$$

La solution de ce système linéaire d'équations est immédiate :

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{R_{XX_1}}{R_{XX_0}} \\[2ex] \sigma^2 = R_{XX_0} - \dfrac{R_{XX_1}^2}{R_{XX_0}} \end{cases}$$

Autres modèles que le Signal AR :

Signal MA → Equations non linéaires → Programmation Non Linéaire

Signal ARMA → Equations non linéaires → Programmation Non Linéaire