

2. Synthèse du signal. Identification

Synthèse du signal

I. SIGNAUX DETERMINISTES

Génération de signal déterministe :

- . par l'*expression analytique* (formule) du signal
- . par un *modèle* (exemple : modèle AutoRégressif (AR))
- . par une *table de look-up* (fichier mémoire)
- . par *Transformation mathématique inverse* (Fourier, Laplace ...)

Exemple : Génération d'un signal sinusoïdal (sans phase initiale)

. *Expression analytique :*

Génération d'un signal sinusoïdal de fréquence f et d' amplitude A

à TC : $x(t) = A \cdot \sin(2\pi ft)$

Signal x généré en se donnant $N = \frac{F}{f}$ échantillons par période ($\frac{1}{f}$)

$F = \frac{1}{T}$: fréquence d'échantillonnage

F doit vérifier la condition de Shannon : $F \geq 2f$

$$\boxed{x(n) = A \sin(2\pi fnT)} \quad n \in \mathbf{Z}$$

. *Modèle :*

Rappel : Modèle AR :
$$x(n) = \sum_{i=1}^N a_i x(n - i)$$

Génération d'un signal sinusoïdal de fréquence f et d'amplitude 1

Modèle AR d'ordre N = 2:
$$x(n) = \alpha x(n - 1) + \beta x(n - 2)$$

Coeffs :
$$\begin{cases} \alpha = 2 \cos(2\pi fT) \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Init :
$$\begin{cases} x(0) = \varphi \quad (\text{phase initiale}) \\ x(1) = \sin(2\pi fT) \\ \text{si on veut une phase initiale non nulle} \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \quad (\text{phase initiale}) \\ x(1) = \sin(2\pi fT) \\ \text{si on veut une phase initiale nulle} \end{cases}$$

$x(n)$ représente le signal sinusoïdal à l'instant nT .

. *Table de look-up :* *Fichier mémoire*

. *Transformation mathématique inverse (Laplace) :*

Génération d'un signal sinusoïdal de fréquence f et d' amplitude 1

$$X(p) = \frac{2\pi f}{p^2 + (2\pi f)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} x(t) = \sin(2\pi ft) \quad (\text{tables})$$

II. SIGNAUX ALEATOIRES

Signaux aléatoires par fonction modulo

Signal aléatoire à distribution uniforme. Bruit blanc uniforme

$$x(n) = A x(n-1) \text{ modulo } P$$

Init : $x(0)$ doit vérifier : $0 < x(0) < P$

On a : $0 < x(n) < P$

(Pour avoir $0 < x(n) < 1$, on divise ensuite chaque terme par P).

Le signal généré est pseudo-aléatoire car périodique de période P .

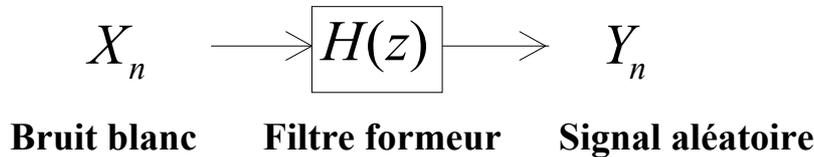
P doit être premier pour que le résultat du modulo ne soit pas nul.

On peut prendre par ex. : $x(0) = 100$, $A = 281$, $P = 31357$

Echantillons indépendants les uns des autres → **Bruit blanc uniforme**.

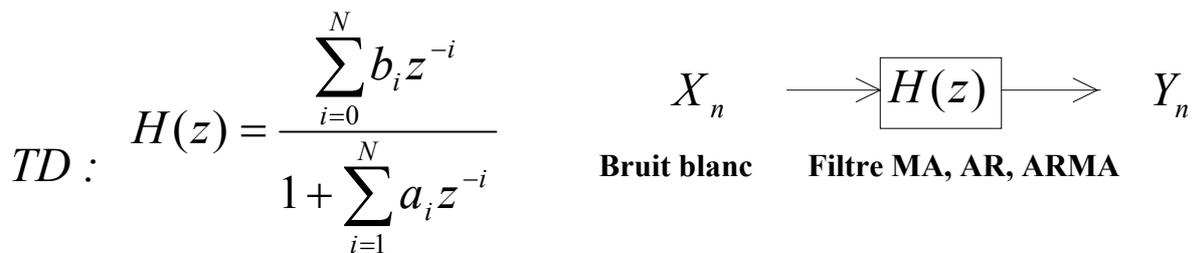
Identification (modélisation)

Processus générateur de signal aléatoire : filtre formeur du 1er ordre



→ Description du signal = paramètres du filtre + variance du bruit blanc

Processus générateurs : MA, AR, ARMA



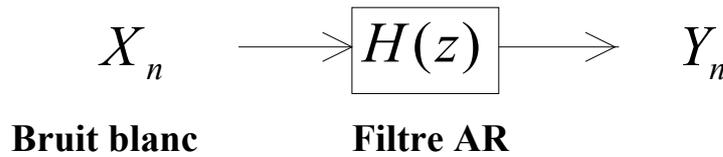
A partir de φ_{yy_k} → trouver les paramètres a_i et b_i du filtre $H(z)$ qui génère $\{Y_n\}$ à partir de $\{X_n\}$, bruit blanc de variance à déterminer.

Rappel: Modèle AR :
$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad \rightarrow \quad Y_n = X_n - \sum_{i=1}^N a_i Y_{n-i}$$

Modèle MA :
$$H(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad \rightarrow \quad Y_n = \sum_{i=0}^N b_i X_{n-i}$$

Modèle ARMA :
$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad \rightarrow \quad Y_n = \sum_{i=0}^N b_i X_{n-i} - \sum_{i=1}^N a_i Y_{n-i}$$

Signal AR



Hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} E[X_n] = 0 \\ E[X_n^2] = V \\ E[X_n \cdot X_{n+k}] = 0 \quad \forall k \neq 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} E[X_n] = 0 \\ \varphi_{xxk} = E[X_n \cdot X_{n+k}] = V\delta_{k,0} \end{array} \right.$$

($\{X_n\}$ bruit blanc centré de variance V)

et :

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

On a vu (Système d'équations de Yule-Walker) :

$$Y(z) \left[1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \right] = X(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} Y_n = X_n - \sum_{i=1}^N a_i Y_{n-i}$$

$$\varphi_{xxk} = V\delta_{k,0} \text{ et } \varphi_{xyk} = h_k * \varphi_{xxk} \rightarrow \varphi_{xyk} = h_k * (V\delta_{k,0}) = V(h_k * \delta_{k,0}) = V \cdot h_k$$

$$\rightarrow \boxed{h_k = \frac{\varphi_{xyk}}{V}} \quad h_k = \frac{\varphi_{xyk}}{V} = \frac{E[X_{n-k} Y_n]}{V} = \frac{E\left[\left(Y_{n-k} + \sum_{i=1}^N a_i Y_{n-k-i}\right) Y_n\right]}{V} \text{ car } X_n = Y_n + \sum_{i=1}^N a_i Y_{n-i}$$

$$\rightarrow \boxed{h_k = \frac{\varphi_{yyk} + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yyk+i}}{V}} \rightarrow \varphi_{yyk} = V \cdot h_k - \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yyk+i}$$

. Autocorrélation de $\{Y_n\}$: $\varphi_{yy_k} = E[Y_{n-k}Y_n] = ?$

$$\varphi_{yy_k} = V \cdot h_k - \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_{k+i}} \rightarrow \boxed{\varphi_{yy_k} = V \cdot h_{-k} - \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_{k-i}}} \text{ car autocorrélation paire}$$

. $k = 0$:

$$Y_n = X_n - \sum_{i=1}^N a_i Y_{n-i} \rightarrow h_n = \delta_n - \sum_{i=1}^N a_i h_{n-i} \rightarrow h_0 = 1 \rightarrow \boxed{\varphi_{yy_0} = V - \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_i}}$$

. $k > 0$:

$$\varphi_{yy_k} = -\sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_{k-i}} \text{ car } h_{-k} \equiv 0 \text{ pour } k > 0 \text{ (filtre } h_n \text{ causal } Y_n = X_n - \sum_{i=1}^N a_i Y_{n-i})$$

On a aussi : $\boxed{\varphi_{yy_k} = -\sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_{i-k}}}$ car autocorrélation paire.

Ces équations peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{yy_0} + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_i} = V \\ \varphi_{yy_1} + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_{i-1}} = 0 \\ \dots \\ \varphi_{yy_N} + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_{N-i}} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{pour } 0 \leq k \leq N : \sum_{n=0}^N \varphi_{yy_{k-n}} a_n = \begin{cases} V & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leq k \leq N \end{cases} \text{ (} a_0 = 1 \text{)}$$

soit, sous forme matricielle : ce sont les équations de **Yule-Walker** :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{yy_0} & \varphi_{yy_1} & \dots & \varphi_{yy_N} \\ \varphi_{yy_1} & \varphi_{yy_0} & \dots & \varphi_{yy_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{yy_N} & \varphi_{yy_{N-1}} & \dots & \varphi_{yy_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ noté : } \boxed{\mathbf{R} \underline{a} = \underline{v}}$$

Relations entre coeffs du modèle et covariances (cas $N = 1$: 1er ordre)

Prenons pour exemple le processus AR d'ordre $N = 1$ à TD engendré par :

$$x_n + a_1 x_{n-1} = w_n \quad \text{avec } |a_1| < 1 \text{ pour assurer la stabilité du filtre.}$$

Calculons la **fonction d'autocovariance** $R_{XX_k} = E[X_{n+k} X_n]$ de X_n :
 (*Rappel* : bruit blanc de variance σ^2 : $E[W_{n+k} W_n] = \sigma^2 \delta_{n,k}$ et R_{XX_k} paire)

Comme : $x_n = w_n - a_1 x_{n-1}$

on a : $x_n^2 = x_n w_n - a_1 x_n x_{n-1} = (w_n - a_1 x_{n-1}) w_n - a_1 x_n x_{n-1}$

$$\rightarrow x_n^2 = w_n^2 - a_1 x_{n-1} w_n - a_1 x_n x_{n-1}$$

Comme il n'y a pas de dépendance causale entre x_{n-1} et w_n

(x_{n-1} est fonction de w_{n-1}, w_{n-2}, \dots)

Comme w_{n-1}, w_{n-2}, \dots sont indépendants de w_n (bruit blanc)

$\rightarrow x_{n-1}$ et w_n sont indépendants donc non corrélés, ce qui s'écrit :

$$E[X_{n-1} W_n] = E[X_{n-1}] E[W_n] = 0 \quad (\text{car le bruit blanc est centré})$$

on a : $E[X_n^2] = E[W_n^2] - a_1 E[X_n X_{n-1}]$ soit : $R_{XX_0} = \sigma^2 - a_1 R_{XX_1}$

On a aussi $x_n x_{n-1} = x_{n-1} w_n - a_1 x_{n-1}^2 \rightarrow E[X_n X_{n-1}] = -a_1 E[X_{n-1}^2]$

soit : $R_{XX_1} = -a_1 R_{XX_0}$

On a donc le système d'équations :

$$\begin{cases} R_{XX_0} + a_1 R_{XX_1} = \sigma^2 \\ R_{XX_1} + a_1 R_{XX_0} = 0 \end{cases}$$

Ce système linéaire d'équations peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{R} \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{v}} \quad \text{avec :}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{XX_0} & R_{XX_1} \\ R_{XX_1} & R_{XX_0} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_0 = 1$$

La solution de ce système linéaire d'équations est immédiate :

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{R_{XX_1}}{R_{XX_0}} \\ \sigma^2 = R_{XX_0} - \frac{R_{XX_1}^2}{R_{XX_0}} \end{cases}$$

Autres modèles que le Signal AR :

Signal MA → Equations non linéaires → Programmation Non Linéaire

Signal ARMA → Equations non linéaires → Programmation Non Linéaire