

3. Caractérisation (Analyse - Transformations fréquentielles). Estimation

Caractérisation

I. TRANSFORMATIONS FREQUENTIELLES

Transformation de Fourier Discrète (TFD)

TFD :

$$\left| \begin{array}{l} x(n) \\ M \text{ termes et causale} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{TFD}} \left| \begin{array}{l} X(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n)e^{-i2\pi kn/M} = \text{TFD}[x(n)] \\ M \text{ termes} \end{array} \right.$$

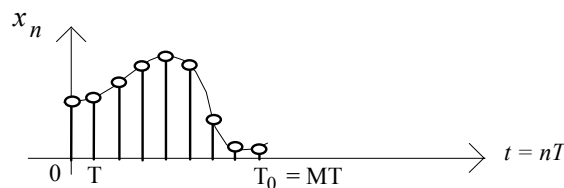
n représente un indice temporel, k un indice fréquentiel.

TFD Inverse (TFDI) :

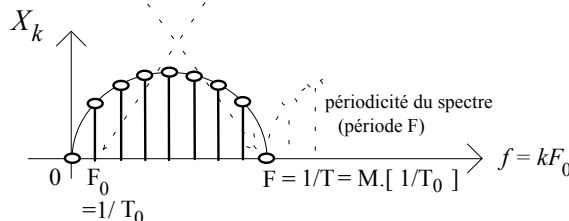
$$\left| \begin{array}{l} x(n) \\ M \text{ termes} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{M-1} X(k)e^{i2\pi kn/M} = \text{TFDI}[X(k)] \\ M \text{ termes} \end{array} \right.$$

Interprétation

Séquence temporelle



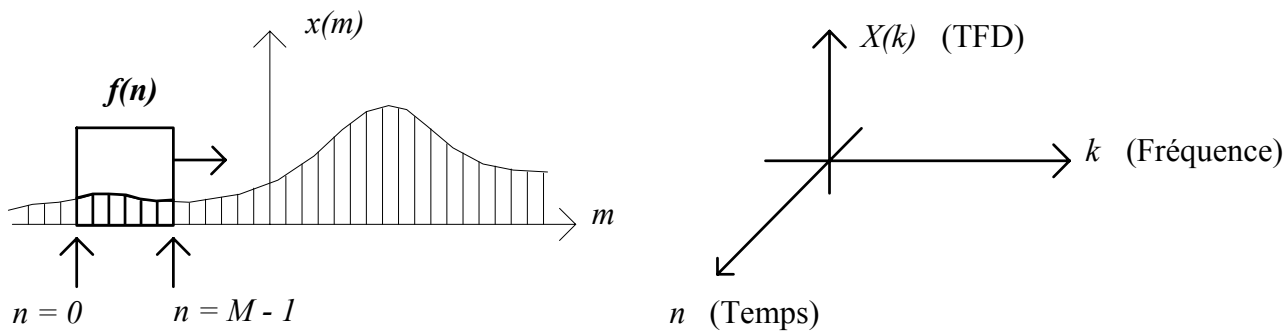
Séquence TFD



T_0 : Durée d'observation de la séquence temporelle
 T : Période d'échantillonnage
 M : Nombre d'échantillons pendant T_0

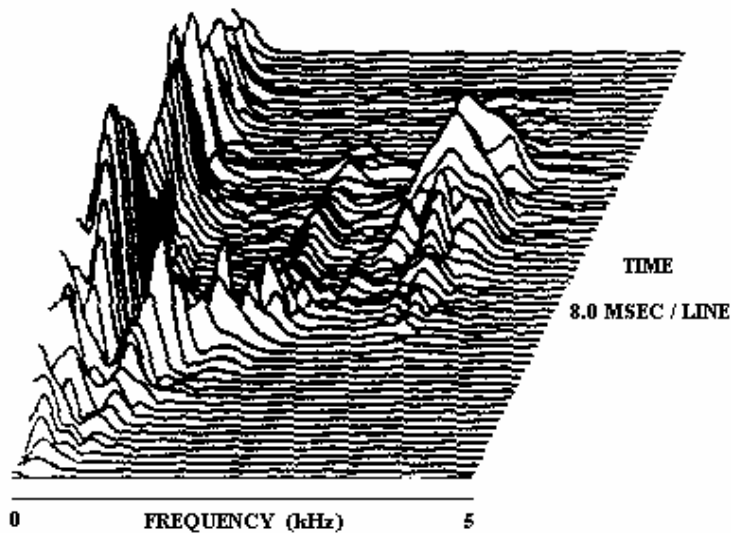
Exemple : $\left| \begin{array}{l} T_0 = 1 \text{ s} \\ T = 0.1 \text{ s} \\ M = 10 \text{ échantillons} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F_0 = 1/T_0 = 1 \text{ Hz} \\ F = 10 \text{ Hz} \end{array} \right.$

Spectrogramme - Transformation de Fourier à Court Terme (TFCT)



Spectrogramme (3D) (*Représentation Temps-Fréquence*) :

60 DFT PASSES OF SPOKEN WORD "READ"



Spectrogram (from 2D graphs) of the word "READ" computed from contiguous 8 msec. speech segments.

$$\text{TFCT} : X(n, k) = \frac{1}{M} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) f(n-m) e^{\frac{i2\pi km}{M}} \quad f(n) : \text{fen\^etre}$$

Transformation de Wigner-Ville (analyse temps-fréquence)

$$TWW[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-i2\pi v\tau} d\tau = X(v, t)$$

Transformation de Hilbert

$$x(t) \xrightarrow{TH} \hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

ONDELETTES

RAPPEL : TRANSFORMEE DE FOURIER CONTINUE

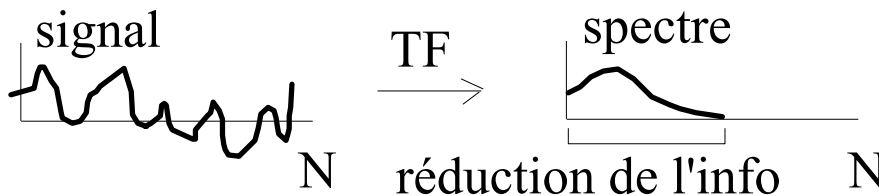
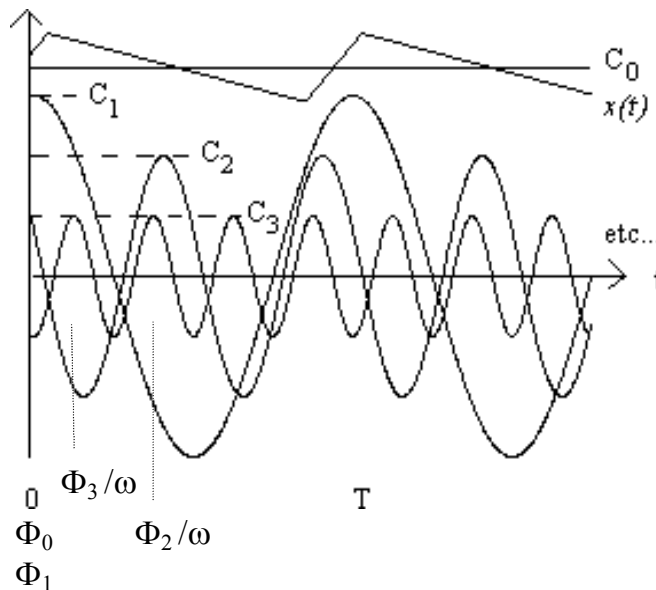
DECOMPOSITION :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Signal = Somme d'ondes (→ signal stationnaire)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(k\omega t + \Phi_k)$$

Exemple : Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique « triangulaire »



RECONSTRUCTION :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

TRANSFORMEE EN ONDELETTES CONTINUE

DECOMPOSITION : $\psi(t)$: Ondelette mère

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

notée : $F(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau)d\tau \quad : \text{produit scalaire}$$

ONDELETTES FILLES : $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$

RECONSTRUCTION $f(t) = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} F(a,b) \psi_{a,b}(t) da db$

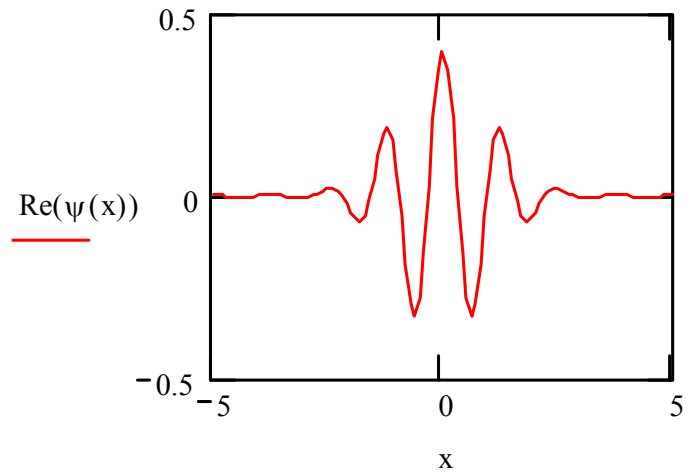
avec : $C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\nu)| \frac{d\nu}{\nu}$ où $\Psi(\nu) = \text{TF de } \psi(t)$

Condition d'existence $\int_0^{\infty} |\Psi(\nu)| \frac{d\nu}{|\nu|} = \int_{-\infty}^0 |\Psi(\nu)| \frac{d\nu}{|\nu|} < \infty$

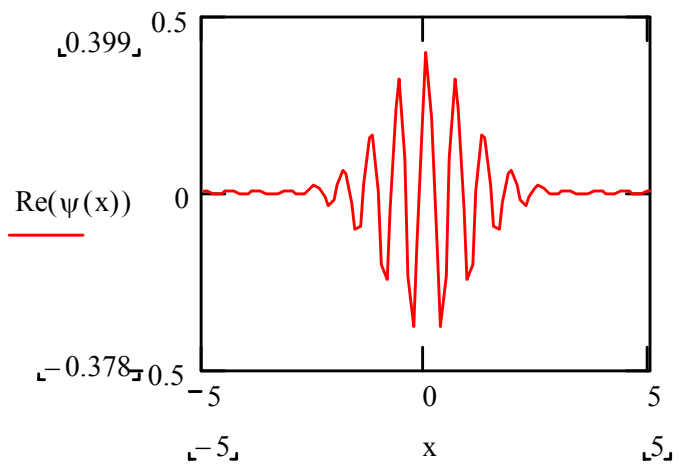
$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

Types d'ondelettes : Ondelettes de Morlet

Ondelette mère :
$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega_0 x}$$



Facteur d'échelle : $\omega_0 = 5$

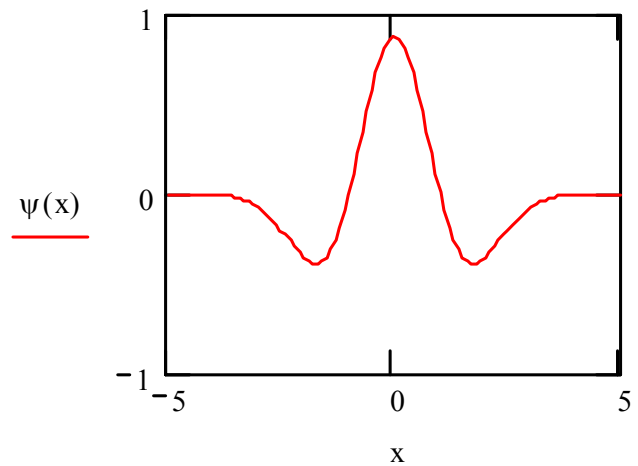


Facteur d'échelle : $\omega_0 = 10$

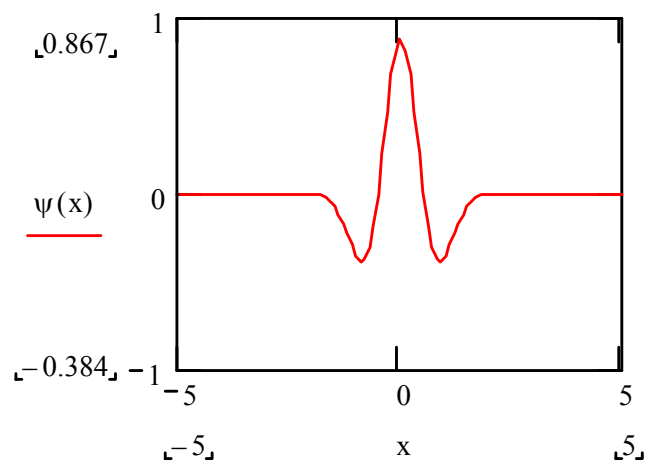
Types d'ondelettes : Chapeau mexicain

Ondelette mère :
$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Avec le facteur d'échelle a :
$$\psi\left(\frac{x}{a}\right)$$



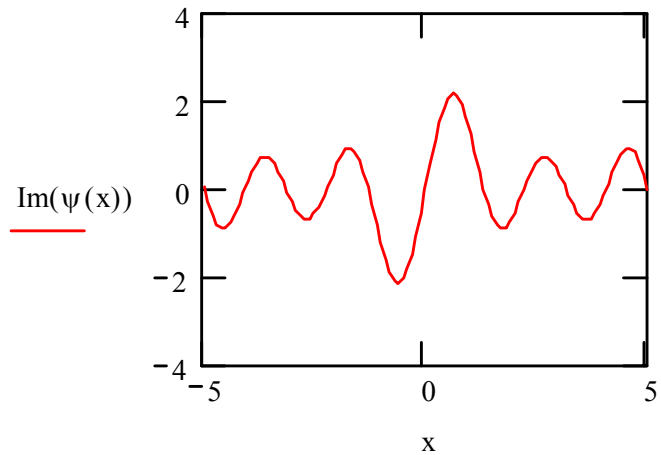
Facteur d'échelle : $a = 1$



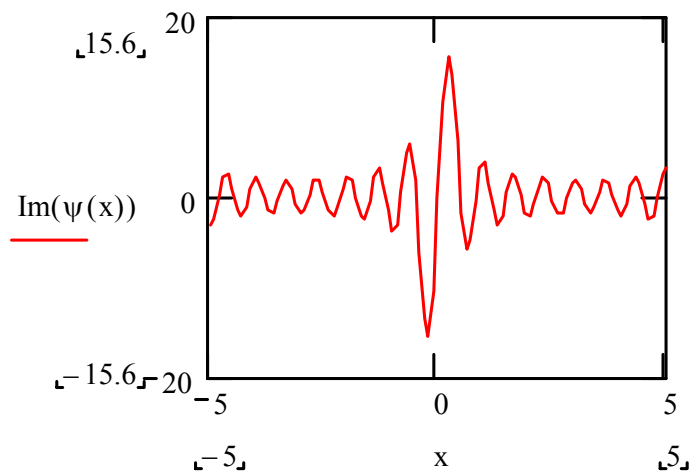
Facteur d'échelle : $a = 0.5$

Types d'ondelettes : Ondelettes d'Ingrid Daubechies

Ondelette mère :
$$\psi(x) = \sum_{k=-(2N-1)}^{2N-1} \frac{1}{5} k [\cos(kx) + i \sin(kx)]$$



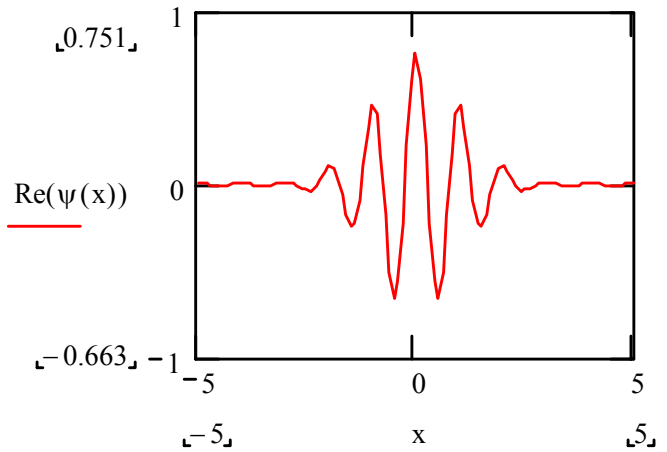
Facteur d'échelle : $N = 2$



Facteur d'échelle : $N = 5$

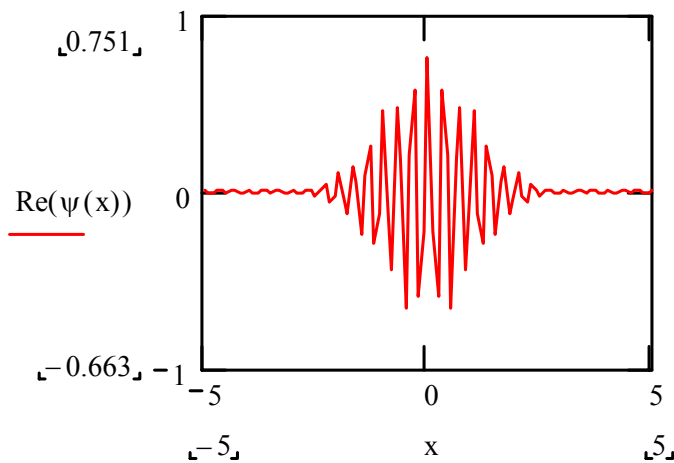
Types d'ondelettes : Ondelettes de Gabor

Ondelette mère (Gaborette) :
$$\psi(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i2\pi\nu x}$$



Facteur d'échelle : $\nu = 1$

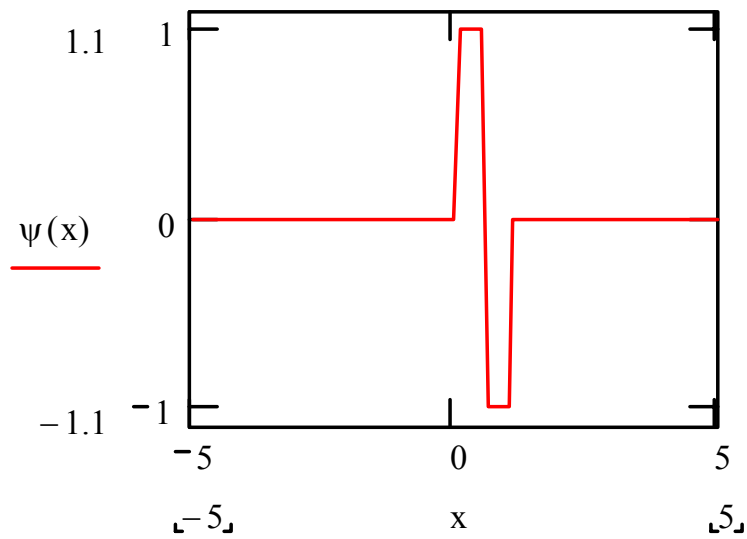
Facteur d'échelle : $\nu = 3$



Ondelettes de Haar

Ondelette mère :

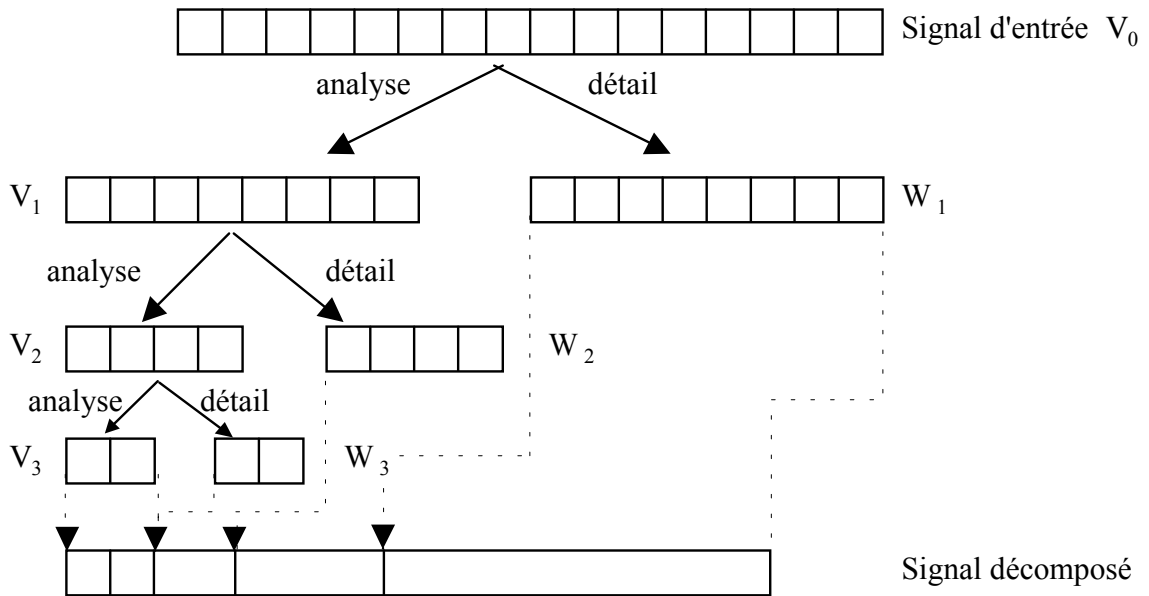
$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



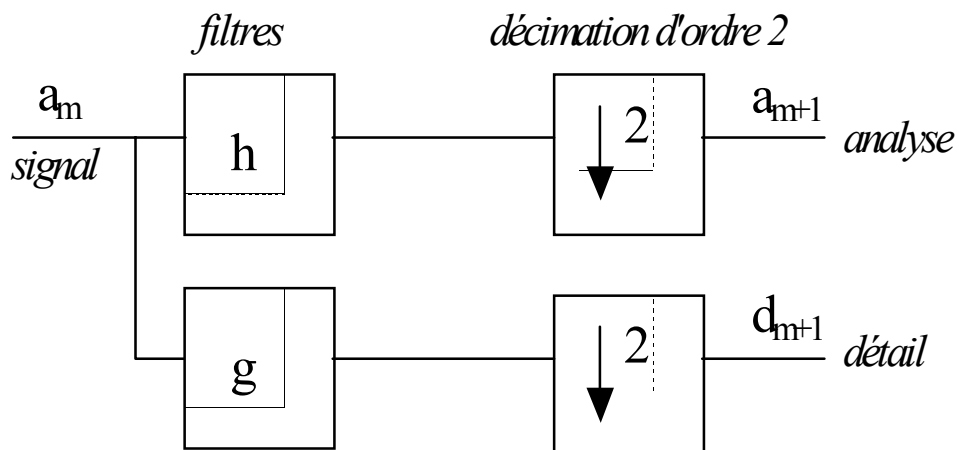
Algorithme de Mallat

PARTITIONNEMENT : ANALYSE + DETAIL

Décomposition

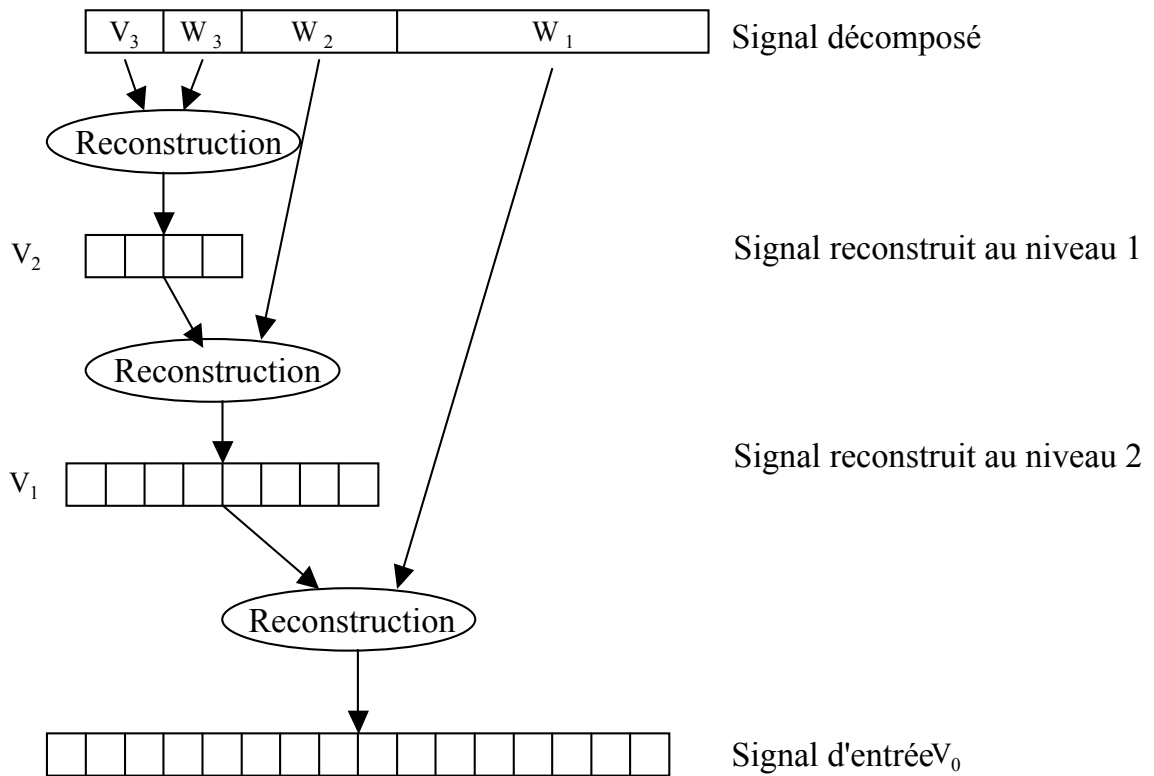


Décomposition

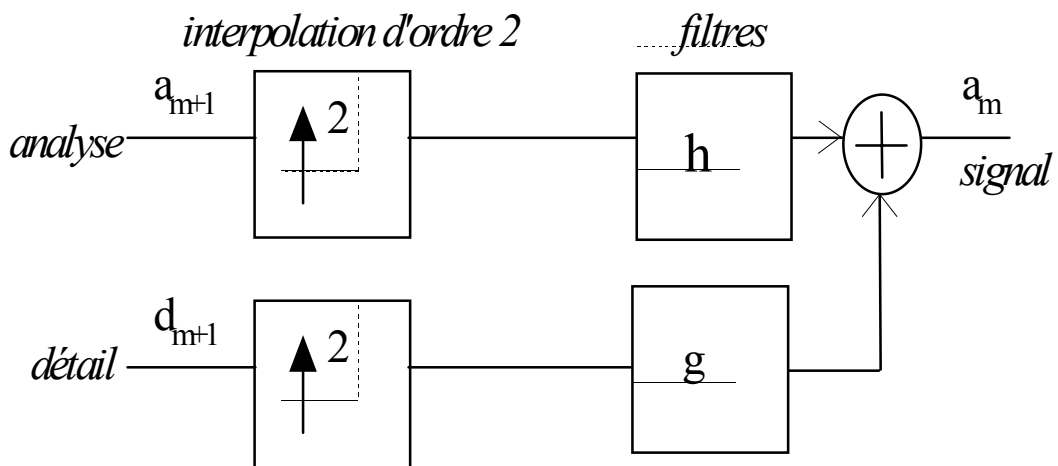


Ex : Haar $h[n] = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\}$ $g[n] = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\}$

Reconstruction



Reconstruction



Ex : Haar $h[n] = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\}$ $g[n] = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\}$

Domaines principaux d'application des ondelettes

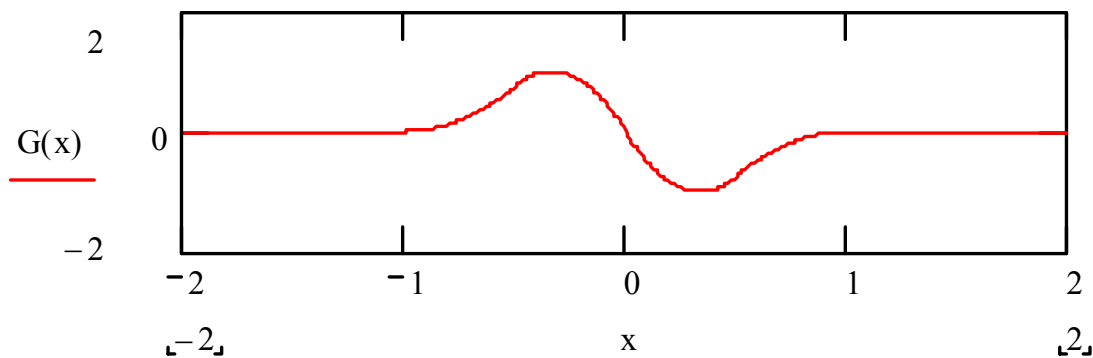
- l'analyse vocale
- l'analyse de signaux radar
- la compression des signaux

Exemples de résultats d'une analyse en ondelettes

Transformée en ondelettes de Daubechies

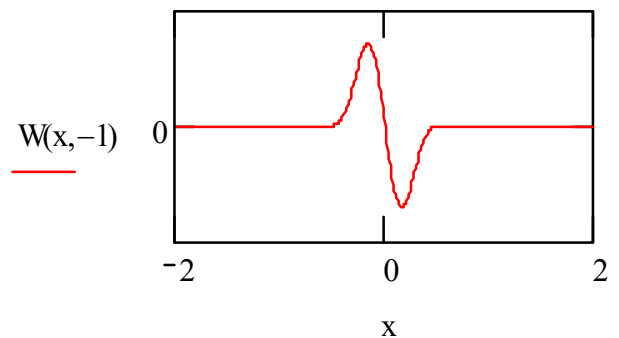
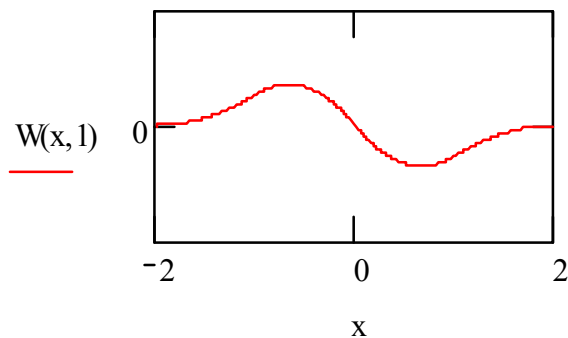
ONDELETTES 1D

Définition de l'ondelette mère $G(x)$



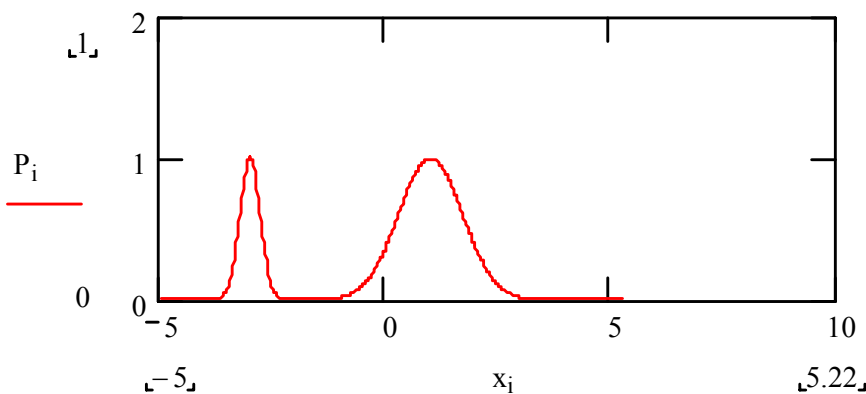
Définition des ondelettes filles $W(x,j)$ obtenues à partir de $G(x)$

$$W(x,j) := \frac{1}{\sqrt{2^j}} \cdot G\left(\frac{x}{2^j}\right)$$

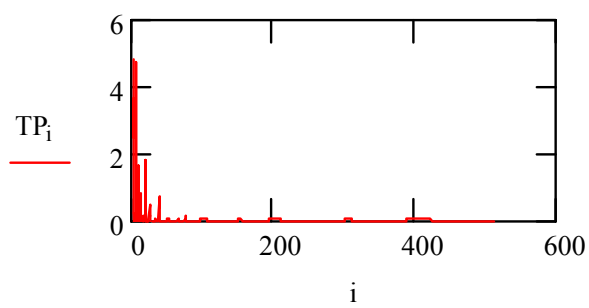
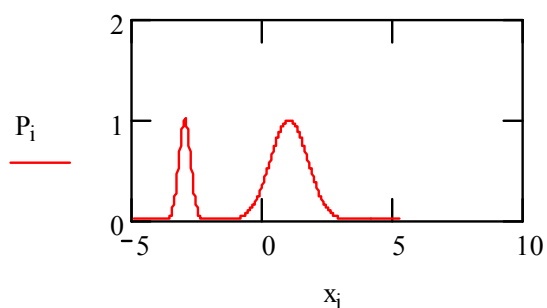
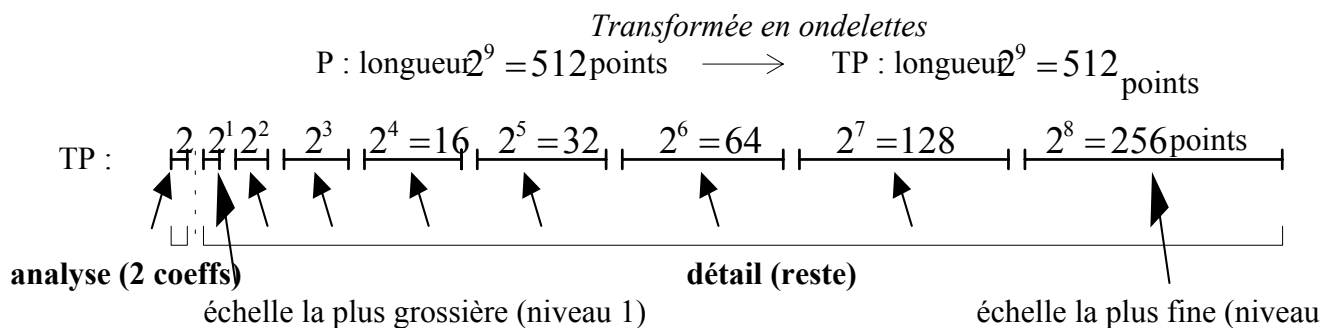


Transformée en ondelettes $T(p,j,x)$ de la fonction p au point x à l'échelle 2^j

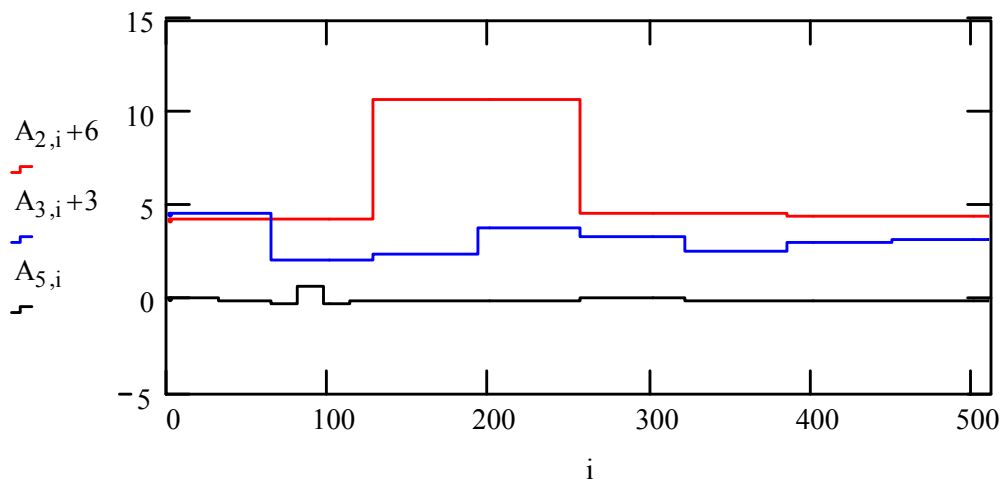
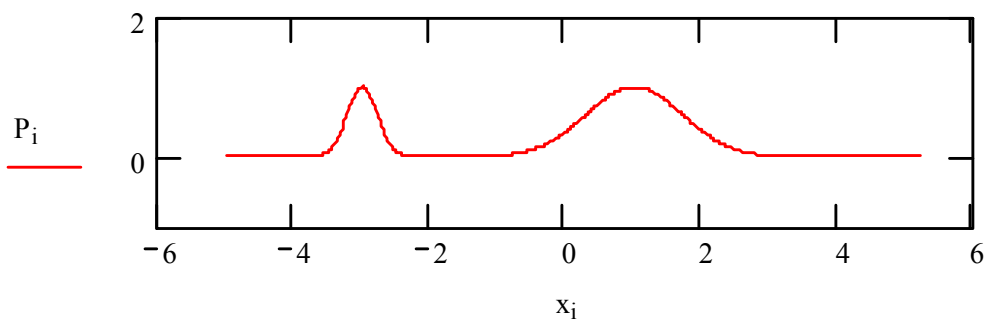
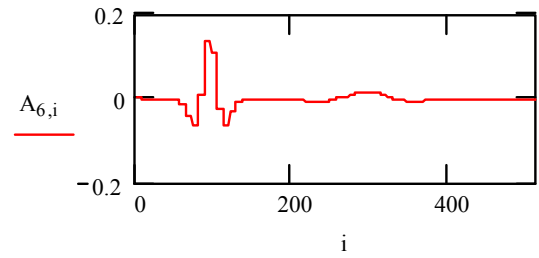
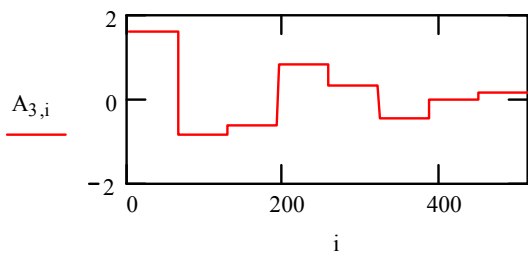
$$T(p, j, x) := \int_{x-2^j}^{x+2^j} p(t) \cdot W(t - x, j) dt$$



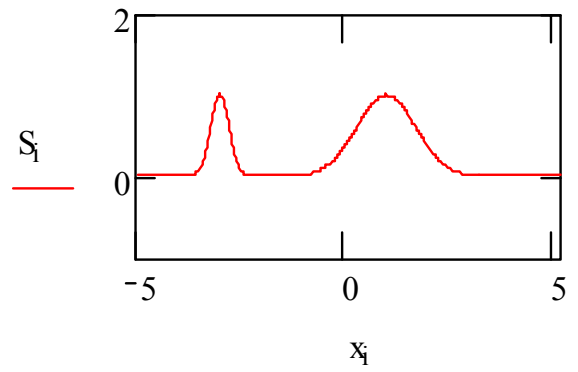
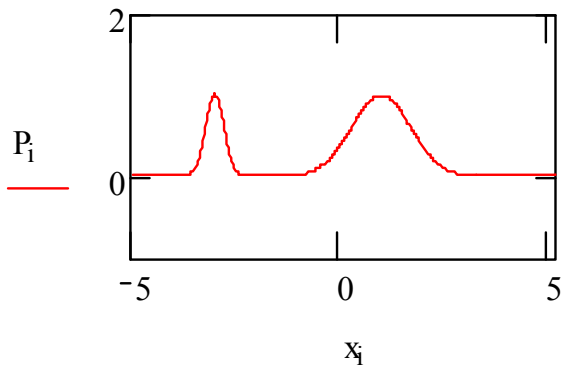
TP := dwavelet (P) length (TP) = 512 length (P) = 512



Niveau : $r := 1..8$ Information à l'échelle r : $A_{r,i} := TP_{2^r + \text{floor}\left(\frac{i}{2^{9-r}}\right)}$



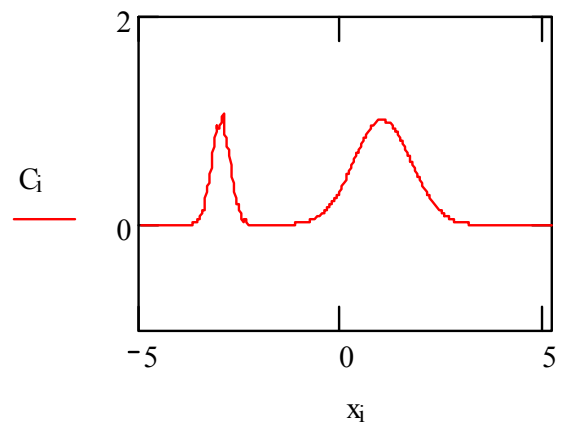
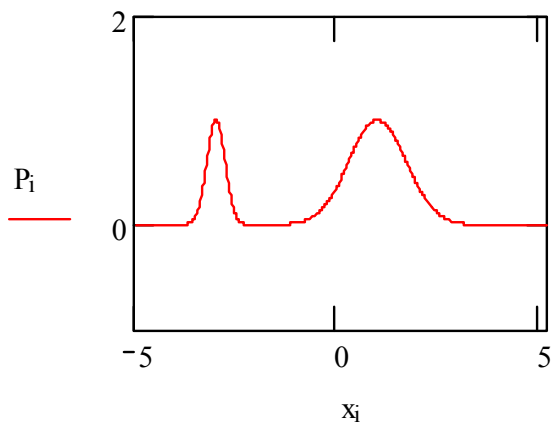
Reconstruction :
$$p(t) := \sum_x \sum_j T(p, j, x) \cdot W(t - x, j) \quad S := \text{idwavelet}(TP)$$



COMPRESSION

$k := 64..511 \quad TP_k := 0$

$C := \text{idwavelet}(TP)$



ONDELETTES 2D

PAS DE COMPRESSION

Image originale



Image ondelettes

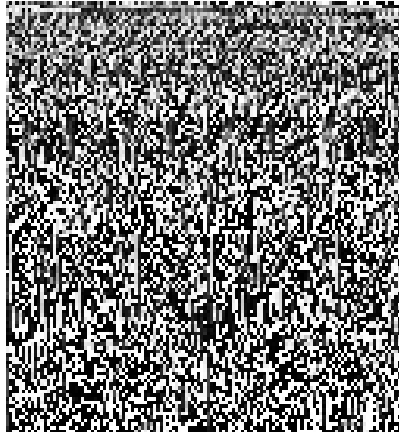
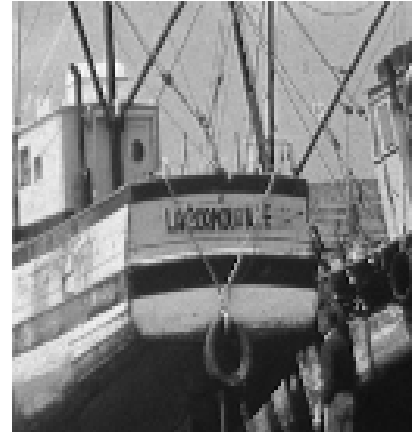


Image ondelettes inverse



COMPRESSION PAR 2

Image originale



Image ondelettes tronquée



Image ondelettes inverse



COMPRESSION PAR 4

Image originale



Image ondelettes tronquée

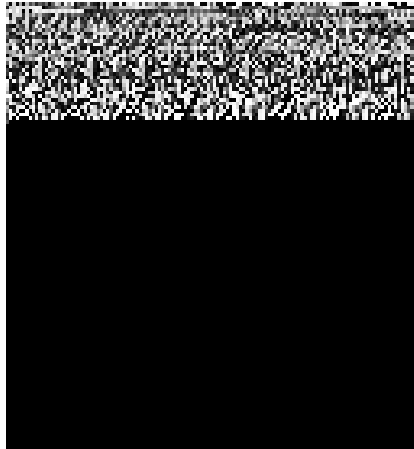


Image ondelettes inverse



COMPRESSION PAR 10

Image originale



Image ondelettes tronquée



Image ondelettes inverse



II. ANALYSE CEPSTRALE

. Cepstre complexe de la séquence $x(n)$: $c_x(n) = TZ^{-1}[\ln(X(z))]$

avec : $X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

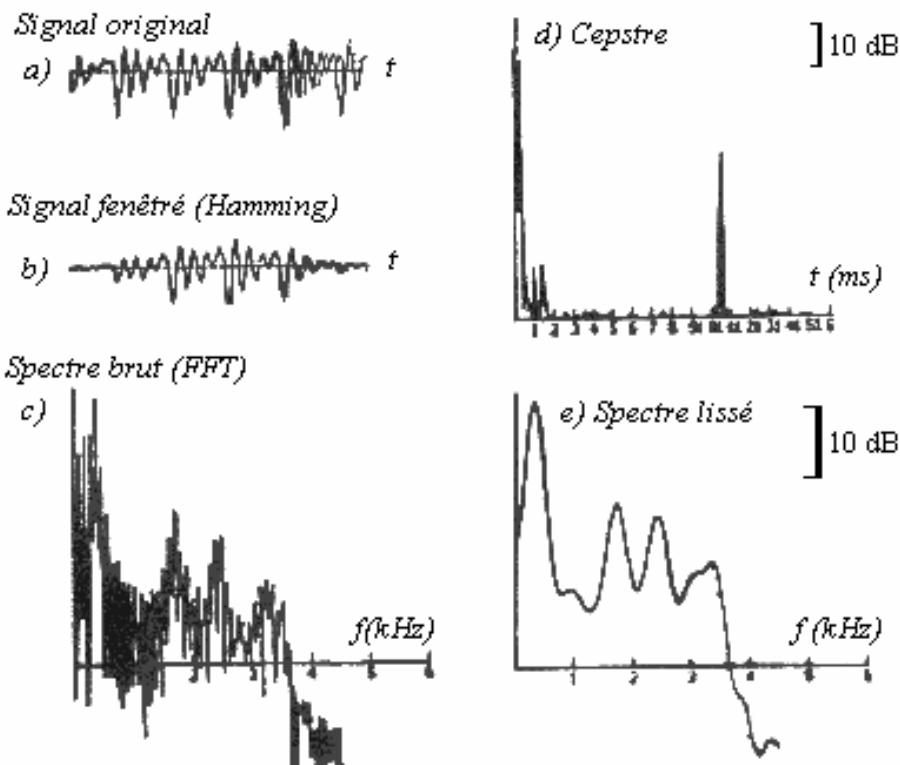
. TZ $C_x(z)$ du cepstre $c_x(n)$: $C_x(z) = \ln(X(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n)z^{-n}$

. En régime harmonique ($z = e^{i\omega} = e^{i2\pi f}$) : **Cepstre fréquentiel :**

$$TF[c_x(n)] = C_x(f)$$

Application : Traitement de la parole

Coefficients cepstraux



Les différentes étapes d'une analyse cepstrale

III. ANALYSE LPC

Coeffs de prédiction LPC $a_k \equiv$ coeffs du filtre formeur AR générateur du signal

IV. ANALYSE SPECTRALE

Spectre de signal déterministe = TF (signal)

Signal aléatoire : on ne dispose que d'une réalisation

Estimateurs de corrélation

Intercorrélation de 2 signaux $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$:

$$\phi_{xy_k} = E[X_n Y_{n+k}]$$

Ergodicité :
$$\phi_{xy_k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n y_{n+k}$$

Estimation de l'autocorrélation

Dans la pratique, on ne dispose pas d'une infinité d'échantillons mais seulement de N échantillons :

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_n \text{ défini pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ \text{et} \\ x_{n+k} \text{ défini pour } 0 \leq n+k \leq N-1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_n \text{ défini pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ \text{et} \\ x_{n+k} \text{ défini pour } -k \leq n \leq N-k-1 \end{array} \right.$$

Intersection :
$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq n \leq N-k-1 & \text{si } k \geq 0 \\ -k \leq n \leq N-1 & \text{si } k < 0 \end{array} \right.$$

\rightarrow moyenne que sur $N - |k|$ échantillons de $\{x_n\}$:

En remarquant qu'une autocorrélation est paire, on a :

$$\varphi_{xx_{k<0}} = \varphi_{xx_{k>0}} = \varphi_{xx_{|k|}}$$

→ estimation $\hat{\varphi}_{xx_k}$ et estimateur $\hat{\phi}_{xx_k}$ de l'autocorrélation :

$$\hat{\varphi}_{xx_k} = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x_n x_{n+k} \quad \boxed{\hat{\phi}_{xx_k} = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X_n X_{n+k}}$$

Algorithme de calcul de l'estimation $\hat{\varphi}_{xx_k}$ par TF :

$$\hat{\varphi}_{xx_k} = \frac{1}{N-|k|} (x_k * x_{-k}) \xrightarrow{TFD} \hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N-|k|} (X_k \cdot X_k^*) = \frac{1}{N-|k|} |X_k|^2$$

d'où :

1. Calcul de $\{X_k\} = TFD(\{x_n\})$
2. Calcul de $\{|X_k|^2\}$
3. Calcul de $\hat{\varphi}_{xx_k} = \frac{1}{N-|k|} TFD^{-1}(\{|X_k|^2\})$

Estimation de l'intercorrélation

Intercorrélation = séquence non paire. Transposition du cas précédent :

$$\boxed{\begin{cases} \hat{\varphi}_{xy_k} = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-k-1} x_n y_{n+k} & \text{si } 0 \leq k \leq N \\ \hat{\varphi}_{xy_k} = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N+k-1} x_{n-k} y_n & \text{si } -N \leq k \leq 0 \end{cases}}$$

Estimateurs de DSP

. DSP de $x_n = TF$ [fonction d'autocovariance de x_n]

Estimateur de DSP : méthode du périodogramme

. $\{x_n\}$ signal à caractériser

. $\{f_n\}$ fenêtre de largeur N , fenêtre d'observation de $\{x_n\}$

. $y_n = f_n x_n$ signal observé sur une certaine durée

$$TF(\{y_n\}) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n x_n e^{-j\omega n} = Y(\omega)$$

On appelle **périodogramme** : $\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} |Y(\omega)|^2$ $\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} Y(\omega) \bar{Y}(\omega)$

Dans le cas $\{y_n\}$ réel : $Y_{-k} = \bar{Y}_k$

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} Y(\omega) \bar{Y}(\omega) \rightarrow \hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{-j\omega m} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{j\omega n} = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m e^{-j\omega m} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{j\omega n}$$

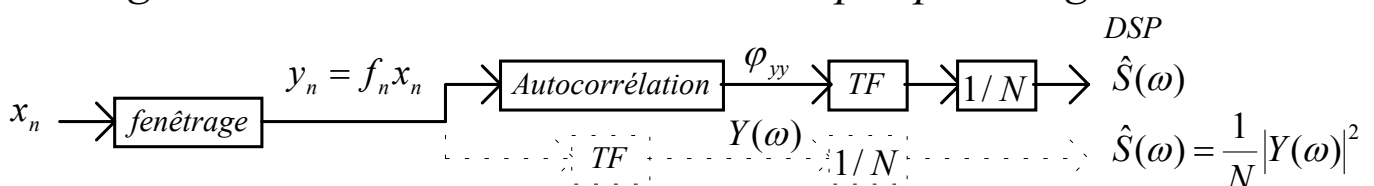
$$\rightarrow \hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} y_n y_{n+k} e^{-j\omega k} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{yy_k} e^{-j\omega k} = \frac{1}{N} TF[\varphi_{yy_k}]$$

où : $\varphi_{yy_k} = \sum_{n=0}^{N-|k|-1} y_n y_{n+k} = \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x_n f_n x_{n+k} f_{n+k}$

Périodogramme $\hat{S}(\omega)$ du signal $x_n = TF(\varphi_{yy_k})$ (signal fenêtré)

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} TF[\varphi_{yy_k}] \quad \text{avec} \quad y_n = f_n x_n = \text{signal } x_n \text{ fenêtré}$$

Algorithme du calcul de la DSP de x_n par périodogramme :



Estimateur de DSP : méthode du corrélogramme

On a vu que :

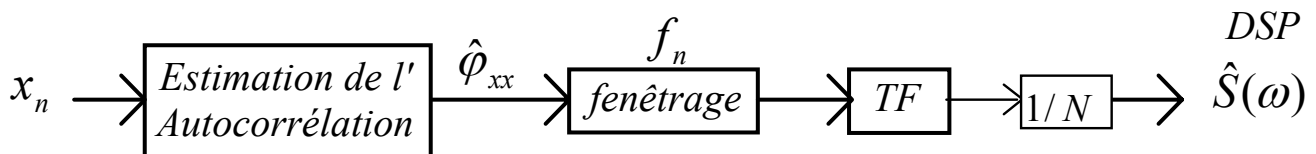
- . il existe un estimateur de l'autocorrélation
- . le périodogramme est la TF de la séquence d'autocorrélation

→ On peut d'abord estimer l'autocorrélation puis on en prend la TF :

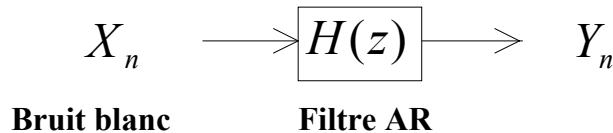
$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N}^N \hat{\phi}_{xx_k} f_k e^{-j\omega k} = \frac{1}{N} TF[\hat{\phi}_{xx_n} f_n]$$

C'est la méthode du corrélogramme.

Algorithme du calcul de la DSP de x_n par corrélogramme :



Estimation de la DSP à partir du modèle AR du signal



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}} \qquad Y_n = X_n - \sum_{k=1}^N a_k y_{n-k}$$

Les DSPs d'entrée et de sortie sont reliées par la relation :

$$\Phi_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{XX}(\omega) \quad \text{où } \Phi_{XX}(\omega) = TF[\phi_{xx_n}] \text{ et } \Phi_{YY}(\omega) = TF[\phi_{yy_n}]$$

$$\rightarrow \Phi_{YY}(\omega) = \frac{\Phi_{XX}(\omega)}{\left| 1 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-jn\omega} \right|^2}$$

$\{X_n\}$ séquence blanche de variance V ($\Phi_{XX}(\omega) = V$) :

$$\rightarrow \boxed{\Phi_{YY}(\omega) = \frac{V}{\left|1 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-jn\omega}\right|^2}}$$

$\Phi_{YY}(\omega)$ obtenu à partir de V et des N paramètres a_n du filtre AR

Les N paramètres sont, avec V , solutions des $N + 1$ équations de **Yule-Walker**

$$\begin{cases} \varphi_{yy_0} + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_i} = V \\ \varphi_{yy_1} + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_{i-1}} = 0 \\ \dots \\ \varphi_{yy_N} + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_{yy_{N-i}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{pour } 0 \leq k \leq N : \sum_{n=0}^N \varphi_{yy_{k-n}} a_n = \begin{cases} V & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leq k \leq N \end{cases}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \varphi_{yy_0} & \varphi_{yy_1} & \dots & \varphi_{yy_N} \\ \varphi_{yy_1} & \varphi_{yy_0} & \dots & \varphi_{yy_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{yy_N} & \varphi_{yy_{N-1}} & \dots & \varphi_{yy_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \boxed{\mathbf{R} \underline{a} = \underline{v}}$$

Algorithme du calcul de la DSP à partir du modèle AR du signal $\{Y_n\}$:

1. Estimation de l'autocorrélation $\{\varphi_{yy_k}\}$
2. Calcul des paramètres a_n ($1 \leq n \leq N$) et de V (solutions de Yule-Walker)

3. $\Phi_{YY}(\omega) = \frac{V}{\left|1 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-jn\omega}\right|^2} \rightarrow$ obtention de la DSP cherchée.