4. Conditionnement - Filtrage. Détection

I. CONDITIONNEMENT - FILTRAGE

1. Prétraitements (Mise en forme, amplification, fenêtrage, filtrage ...)

Préaccentuation et désaccentuation (**Débruitage -** *Télécoms - Parole)*

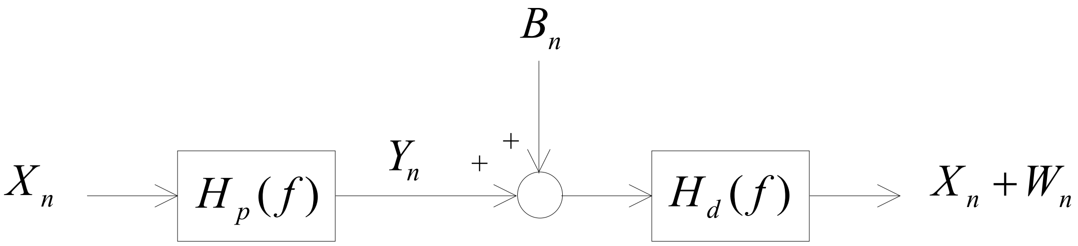
Principe : amélioration du Rapport Signal sur Bruit (*SNR*).

Transmission d'un signal X_n *à travers un canal soumis à un bruit* B_n *:*

Accroissement du SNR en utilisant :

- à l'*émission* un filtre (*préaccentuation*) de FT $H_p(f)$
- à la *réception* le filtre inverse (*désaccentuation*) de FT $H_d(f) = H_p^{-1}(f)$

$S_X(f)$ = DSP de X_n $S_B(f)$ = DSP de B_n



Préaccentuation - désaccentuation

But : déterminer $\{H_p(f), H_p(f)\}$ minimisant la puissance de W_n.

Mais il faut s'imposer une contrainte :

. On pourrait rendre aussi petite que l'on veut la puissance de W_n en multipliant $H_p(f)$ par un facteur A élevé et en divisant $H_d(f)$ par le même facteur. Cela marcherait mais conduirait à une saturation.

. → Contrainte choisie : fixer la puissance P_Y en sortie du filtre d'émission $H_p(f)$, ce qui est raisonnable en pratique.

Détermination des filtres $H_p(f)$ et $H_d(f)$:

La DSP du signal Y_n en sortie du filtre $H_p(f)$ donne P_Y :

$$P_Y = E\left[Y_n^2\right] = R_{YY_0} = TF^{-1}\left[S_Y(f)\right]_{\text{en } \tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df \rightarrow P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \left|H_p(f)\right|^2 S_X(f)df$$

Un même calcul appliqué au filtre $H_d(f)$ excité par B_n seul donne :

$$P_W = E\left[W_n^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_d(f)\right|^2 S_B(f)\,df$$

Il faut minimiser P_W. Technique de minimisation sous contrainte :

les Multiplicateurs de Lagrange (notés λ).

On additionne à l'expression à minimiser, λ fois la contrainte, ce qui conduit à minimiser (en fixant P_Y à la valeur P_0) l'expression :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|H_d(f)\right|^2 S_B(f)df + \lambda\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|H_p(f)\right|^2 S_X(f)df - P_0\right)$$

En remplaçant $H_p(f)$ par $H_d^{-1}(f)$, cette expression s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left|H_d(f)\right|^2 S_B(f) + \lambda\,\frac{S_X(f)}{\left|H_d(f)\right|^2}\right)df - \lambda\,P_0$$

Pour en obtenir le minimum, il faut choisir $\left|H_d(f)\right|^2$ qui rend minimum l'expression sous le signe de l'intégrale :

$$\left|H_d(f)\right|^2 S_B(f) + \lambda\frac{S_X(f)}{\left|H_d(f)\right|^2}$$ $\rightarrow$ qui annule sa dérivée % à $\left|H_d(f)\right|^2$

Il vient : $$\left|H_d(f)\right|^2 = \sqrt{\lambda\,\frac{S_X(f)}{S_B(f)}}$$

Le calcul de λ se fait en exprimant la contrainte :

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|H_p(f)\right|^2 S_X(f)df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_X(f)}{\left|H_d(f)\right|^2}df = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{S_B(f)S_X(f)}df$$

Finalement, il vient pour le filtre de désaccentuation :

$$\left|H_d(f)\right|^2 = \sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{\frac{S_X(f)}{S_B(f)}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{S_B(f)S_X(f)}df}{P_0}\cdot\sqrt{\frac{S_X(f)}{S_B(f)}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\left|H_d(f)\right|^2 = \frac{1}{P_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{S_B(f)S_X(f)}\,df\sqrt{\frac{S_X(f)}{S_B(f)}}}$$

et pour le filtre de préaccentuation :

$$\boxed{\left|H_p(f)\right|^2 = \left|H_d^{-1}(f)\right|^2 = P_0\,\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{S_B(f)S_X(f)}\,df}\sqrt{\frac{S_B(f)}{S_X(f)}}}$$

II. DETECTION

1. Filtrage adapté *(matched filter)*

Problème : Détecter la présence d'un signal, connu, dans du bruit (et non le débruitage de ce signal).

Position du problème

On dispose de la mesure bruitée $\{x_n\}$ qui, selon la présence ou non du signal $\{s_n\}$ à détecter, mêlé au bruit $\{b_n\}$, peut prendre 2 formes :

. $x_n = s_n + b_n$ (*présence*)

. $x_n = b_n$ (*absence*)

où: . $\{s_n\}$ signal déterministe de durée $N+1$

. $\{B_n\}$ est un signal aléatoire centré

Il s'agit de déterminer un filtre linéaire (causal), de RI $\{h_n\}$, d'entrée/sortie respective $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$, qui rend maximal le Rapport Signal sur Bruit (*SNR : Signal to Noise Ratio*), noté ρ.

$y_N(s) = s_n * h_n\big|_{n=N} = \sum_{n=0}^{N} s_{N-n} h_n$: Réponse à $\{s_n\}$ à $n = N$

$y_N(b) = b_n * h_n\big|_{n=N} = \sum_{n=0}^{N} b_{N-n} h_n$: Réponse à $\{b_n\}$ à $n = N$

SNR $\boxed{\rho \overset{\Delta}{=} \dfrac{y_N^2(s)}{E\left[Y_N^2(B)\right]}} = \rho\left(N, \{h_n\}\right)$: Rapport des puissances instantanées à $n = N$

$$\{X_n\} \longrightarrow \boxed{\textit{Filtre}\ \{h_n\}} \xrightarrow{\{Y_n\}} \boxed{\textit{Détecteur}} \begin{array}{l} \longrightarrow \textbf{présence} \text{ de } s_n \text{ dans } X_n \\ \longrightarrow \textbf{absence} \text{ de } s_n \text{ dans } X_n \end{array}$$

On note ρ^* $(= \rho^*(N))$ la valeur maximale de ρ $(= \rho(N, \{h_n\}))$ et $\{h_n^*\}$ la RI optimale correspondante (≡ fournissant ρ^*) du filtre cherché : $\rho^* = \rho\left(N, \{h_n^*\}\right)$.

Remarque

. La valeur du maximum ρ^* de ρ est libre de choix : on peut laisser sa valeur indéfinie, auquel cas la RI $\{h_n\}$ est alors définie à une Constante près, ou bien fixer sa valeur par normalisation :

Normalisation

$$y_N^*(s) = 1 \qquad \text{soit :} \qquad y_N^*(s) = \sum_{n=0}^{N} s_{N-n} h_n^* = 1$$

Solution

On pose : $\underline{\mathbf{s}}_R = \begin{bmatrix} s_N \\ s_{N-1} \\ \cdots \\ s_0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{b}}_R = \begin{bmatrix} b_N \\ b_{N-1} \\ \cdots \\ b_0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \cdots \\ h_N \end{bmatrix}$

Les équations $\begin{cases} y_N(s) = \sum_{n=0}^{N} s_{N-n} h_n \\ y_N(b) = \sum_{n=0}^{N} b_{N-n} h_n \\ \sum_{n=0}^{N} s_{N-n} h_n^* = 1 \end{cases}$ s'écrivent : $\begin{cases} y_N(s) = \underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{s}}_R \\ y_N(b) = \underline{\mathbf{b}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{b}}_R \\ \underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}}^* = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y_N^2(s) = \left(\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}}\right)^2 = \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{s}}_R \underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}} \\ y_N^2(b) = \left(\underline{\mathbf{b}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}}\right)^2 = \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{b}}_R \underline{\mathbf{b}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}} \to E\left[Y_N^2(B)\right] = E\left[\underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{B}}_R \underline{\mathbf{B}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}}\right] = \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} E\left[\underline{\mathbf{B}}_R \underline{\mathbf{B}}_R^{\mathrm{T}}\right] \underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \phi_{BB} \underline{\mathbf{h}} \end{cases}$$

où : $\phi_{BB} = E\left[\underline{\mathbf{B}}_R \underline{\mathbf{B}}_R^{\mathrm{T}}\right]$ = matrice d'autocorrélation du bruit $\{ B_n \}$

Ainsi : $\rho = \dfrac{y_N^2(s)}{E\left[Y_N^2(B)\right]} = \dfrac{\underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{s}}_R \underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}}}{\underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \phi_{BB} \underline{\mathbf{h}}}$ $\qquad \rho^* = \dfrac{\underline{\mathbf{h}}^{*\mathrm{T}} \underline{\mathbf{s}}_R \underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}}^*}{\underline{\mathbf{h}}^{*\mathrm{T}} \phi_{BB} \underline{\mathbf{h}}^*}$

Comme ρ^* est maximal % à $\underline{\mathbf{h}}$, on a nécessairement $\rho \le \rho^*$ donc :

$$a(\underline{\mathbf{h}}) \stackrel{\Delta}{=} \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{s}}_R \underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}} - \rho^* \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \phi_{BB} \underline{\mathbf{h}} \le 0 \quad \forall \underline{\mathbf{h}}$$

car $\underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{s}}_R \underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}} = \left(\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{h}}\right)^2 \ge 0$ et $\underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}} \phi_{BB} \underline{\mathbf{h}} = E\left[Y_N^2(B)\right] \ge 0$

et $a(\underline{\mathbf{h}}) = 0$ pour $\underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{h}}^*$

$a(\underline{\mathbf{h}})$ maximum pour $\underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{h}}^* \to \underline{\mathbf{a}}'(\underline{\mathbf{h}}^*) = \underline{\mathbf{0}}$ où : $\underline{\mathbf{a}}' = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial h_0} \\ \dfrac{\partial a}{\partial h_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial a}{\partial h_N} \end{bmatrix}$

On rappelle les règles de dérivation matricielle :

$$\frac{d\left(\underline{\mathbf{h}}^2\right)}{d\underline{\mathbf{h}}} = 2\underline{\mathbf{h}}, \quad \frac{d\left(\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{h}}\right)}{d\underline{\mathbf{h}}} = \underline{\mathbf{s}}_R, \quad \frac{d\left[\left(\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{h}}\right)^2\right]}{d\underline{\mathbf{h}}} = 2\,\underline{\mathbf{s}}_R\,\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\,\underline{\mathbf{h}} \quad \text{et} \quad \frac{d\left(\underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\phi_{BB}\,\underline{\mathbf{h}}\right)}{d\underline{\mathbf{h}}} = 2\,\phi_{BB}\,\underline{\mathbf{h}}$$

$\rightarrow\ \underline{\mathbf{a}}'(\underline{\mathbf{h}}) = 2\,\underline{\mathbf{s}}_R\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{h}} - 2\,\rho^*\,\phi_{BB}\,\underline{\mathbf{h}}$ et comme $\underline{\mathbf{a}}'(\underline{\mathbf{h}}^*) = \underline{\mathbf{0}}$ et $\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{h}}^* = 1$

on a : $\underline{\mathbf{a}}'(\underline{\mathbf{h}}^*) = 2\underline{\mathbf{s}}_R\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{h}}^* - 2\,\rho^*\,\phi_{BB}\,\underline{\mathbf{h}}^* = \underline{\mathbf{0}} \quad \rightarrow \quad \underline{\mathbf{s}}_R = \rho^*\,\phi_{BB}\,\underline{\mathbf{h}}^*$

Si ϕ_{BB}^{-1} existe : $$\boxed{\underline{\mathbf{h}}^* = \frac{1}{\rho^*}\phi_{BB}^{-1}\,\underline{\mathbf{s}}_R}$$

On peut calculer ρ^* par les relations $\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{h}}^* = 1$ et $\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{h}}^* = \frac{1}{\rho^*}\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\phi_{BB}^{-1}\,\underline{\mathbf{s}}_R = 1$

soit : $$\boxed{\rho^* = \underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\,\phi_{BB}^{-1}\,\underline{\mathbf{s}}_R}$$

Cas particulier important : $\{B_n\}$ est un bruit blanc de variance σ^2

Pour un bruit blanc de variance σ^2, on a : $\phi_{BB} = \sigma^2\,\mathbf{I}$

Et les formules $\rho^* = \underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\,\phi_{BB}^{-1}\,\underline{\mathbf{s}}_R$ et $\underline{\mathbf{h}}^* = \frac{1}{\rho^*}\phi_{BB}^{-1}\,\underline{\mathbf{s}}_R$ deviennent :

$$\boxed{\rho^* = \frac{\underline{\mathbf{s}}_R^{\mathrm{T}}\,\underline{\mathbf{s}}_R}{\sigma^2} = \frac{\sum_{n=0}^{N} s_n^2}{\sigma^2}} \quad \text{et :} \quad \underline{\mathbf{h}}^* = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} s_n^2}\,\underline{\mathbf{s}}_R$$

Comme $\underline{\mathbf{h}}^*$ est défini à une Constante près, on peut prendre :

$\underline{\mathbf{h}}^* = \underline{\mathbf{s}}_R$ soit : $$\boxed{h_n^* = s_{N-n} \qquad n = 0, \cdots, N}$$