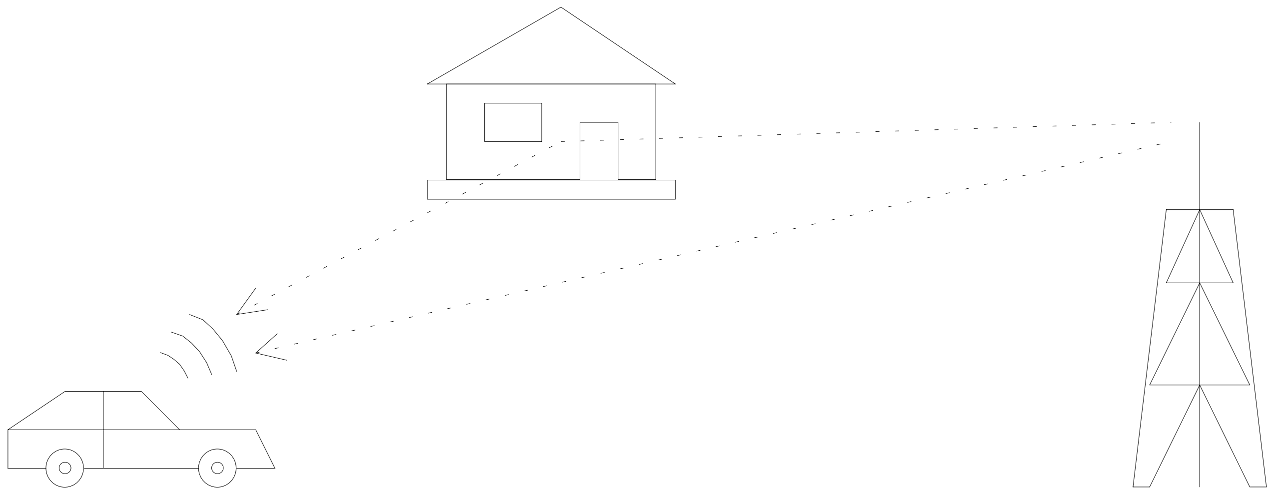
5. Transmission
Codage. Egalisation. Extraction de signal immergé dans du bruit. Filtrage adaptatif

Le canal de communication peut perturber le signal (exemple : écho)



Emetteur

. *Un dispositif de numérisation* des données.

. Un *dispositif de compression et de codage*

. codage de source : suppression de la redondance
. codage canal : introduction d'une redondance

. Un *modulateur* : il adapte le signal au spectre du canal

. Une *antenne* : elle rayonne et diffuse le signal issu du modulateur

Récepteur

. Une *antenne* dont le rôle est de capter le message.

. Un *démodulateur* qui ramène le signal reçu vers la bande de base

. Un *dispositif de récupération de porteuse*

. Un *dispositif d'échantillonnage*

. Un *égaliseur* qui compense les distorsions introduites par le canal

. Des *systèmes de décodage et de décompression*.

Modélisation mathématique

Les symboles porteurs d'information

Signal à transmettre = suite $\{ a_k \}$ de valeurs complexes appartenant à un ensemble fini.

Exemple : *Modulation de phase (PSK Phase Shift Keying)*

$a_k \in \{-1, +1\}$ pour une modulation MDP2 (= par Déplacement de Phase à 2 états *(BPSK Binary Phase Shift Keying)*.
$a_k \in \{-1, +1, -i, +i\}$ pour une modulation MDP4 à 4 états.

Par exemple, $a_k \in \{-2, -1, +1, +2\}$ correspond à une modulation d'amplitude *(AM Amplitude Modulation, ASK Amplitude Shift Keying)* à 4 états.

Données $M-$aires. Constellation

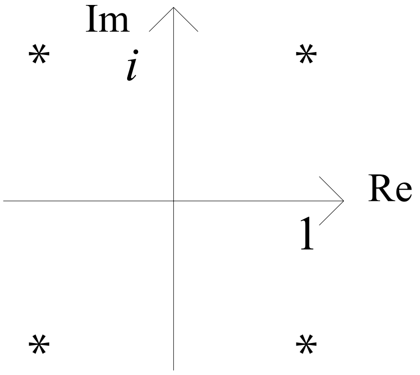
En général, les a_k peuvent prendre M valeurs différentes. On parle de données $M-$aires. Les différents états possibles peuvent être représentés dans le plan complexe.

La représentation dans le plan complexe des différentes valeurs prises par le signal au cours du temps s'appelle une **constellation**.

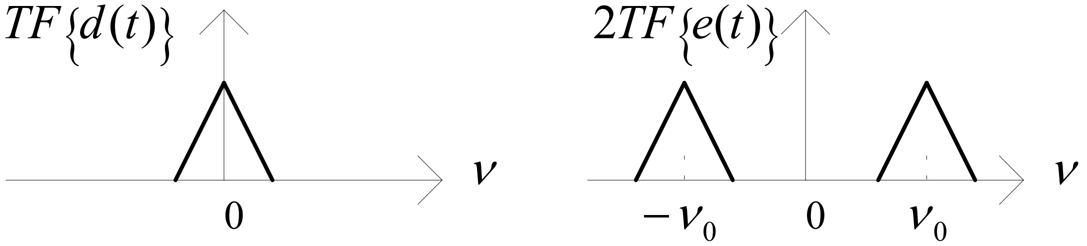
Constellation d'un signal : représentation dans le plan complexe des différentes valeurs prises (alphabet) par ce signal.

Exemple : *Constellation d'une modulation à 4 états de phase*

$$a_k \in \{1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$$

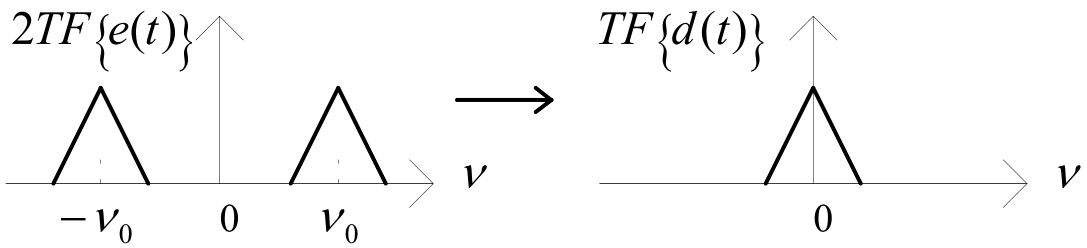


La modulation



Spectres du signal modulant et du signal modulé

La démodulation

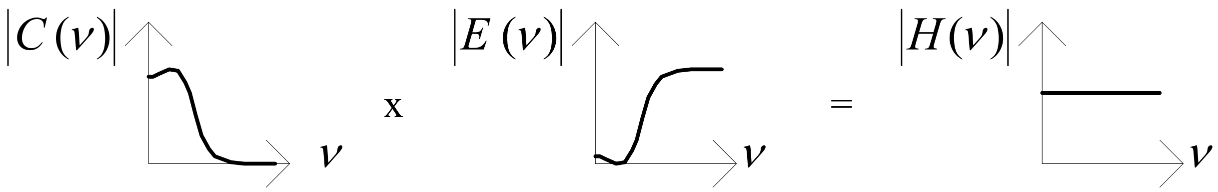


Spectres du signal modulé et du signal modulant

Egalisation

Aspect fréquentiel

Egaliseur = filtre inverse, rendant plate la RF de l'ensemble canal-égaliseur



RF du canal *RF de l'égaliseur* *RF de l'ensemble*

Diagramme en oeil

Cas d'école : signal émis = suite aléatoire blanche de 1 et de -1.

La représentation adoptée ici utilise 16 points par durée symbole.

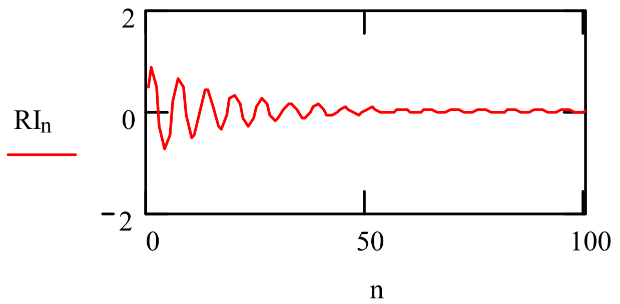
FT du canal : $H(z) = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\, z^{-1}}$ (z^{-1} = retard de 1/16 de symbole)

Si la constellation en sortie se comporte de 2 tâches distinctes, il est clair qu'il sera facile de restituer le signal émis.
(Il suffit pour cela d'utiliser une fonction de type seuillage).

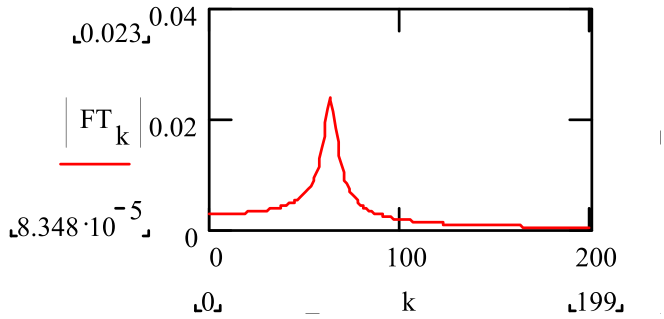
Diagramme en oeil : représentation sur la durée de 1 ou 2 symboles de toutes les configurations possibles de la sortie, associées aux différentes suites de symboles possibles en entrée.

En pratique, l'ouverture de l'oeil constitue un bon indicateur du degré d'interférences entre symboles : plus l'oeil est fermé, plus le taux d'interférences entre symboles est important.

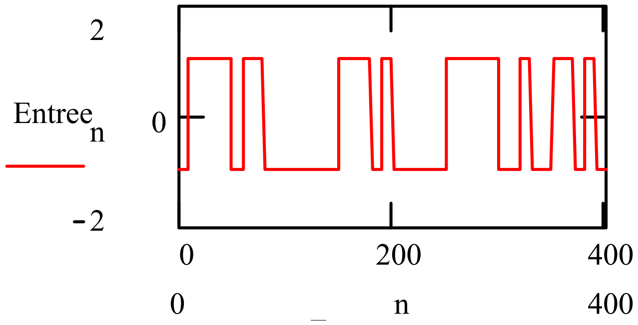
RI du canal



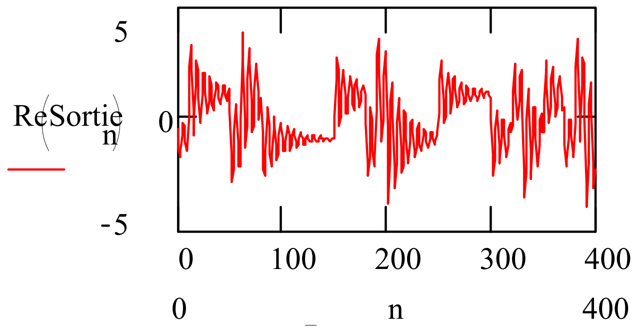
Spectre d'amplitude du canal



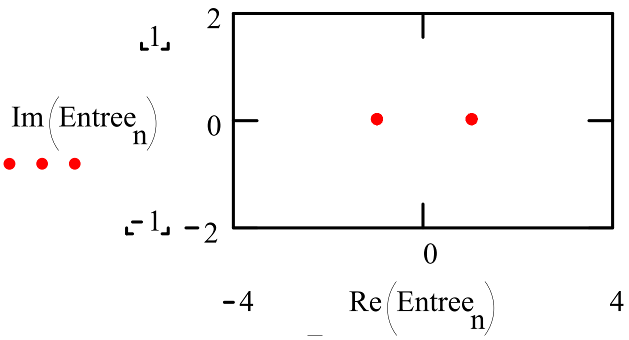
Entrée du canal (16 points/symbole)



Sortie du canal (partie réelle)



Constellation du signal d'entrée



Constellation du signal de sortie

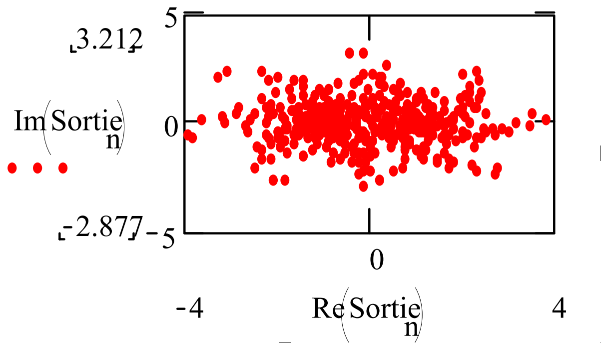
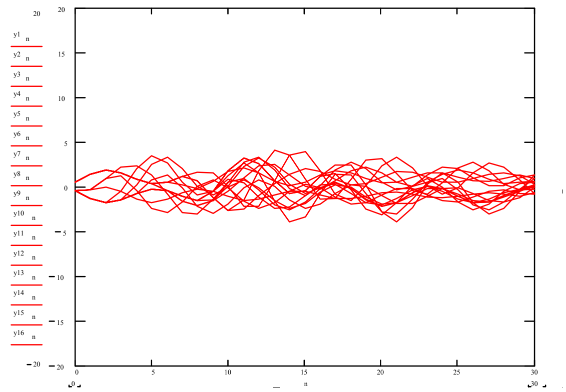


Diagramme en oeil



I. CODAGE-DECODAGE (MODULATION-DEMODULATION)

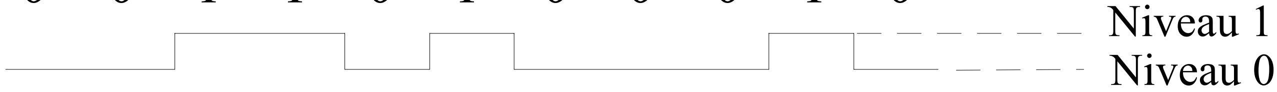
3 façons d'insérer le signal à émettre BF (Basse Fréquence) dans la porteuse HF (Haute Fréquence) :

On **insère**
- la **BF** dans l'**amplitude** de la **porteuse** : *Modulation AM*
(*Amplitude Modulation*) ou encore *ASK*
- la **BF** dans la **fréquence** de la **porteuse** : *Modulation FM*
(*Frequency Modulation*) ou encore *FSK*
- la **BF** dans la **phase** de la **porteuse** : *Modulation PM*
(*Phase Modulation*) ou encore *PSK*

Ex. Transmission d'un signal numérique (porteuse sinusoïdale )

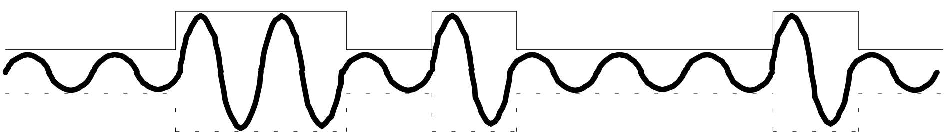
Signal à transmettre :

0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0



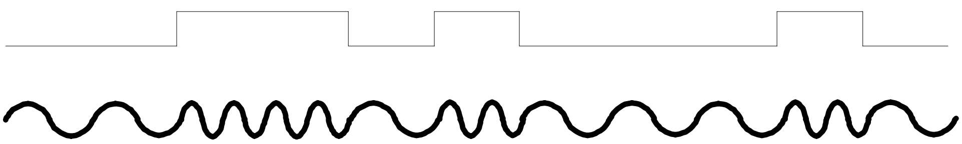
Modulation d'amplitude AM :

0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0



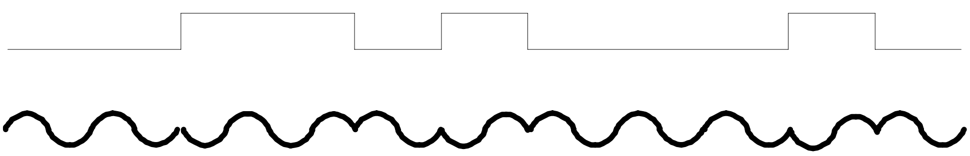
Modulation de fréquence FM :

0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0



Modulation de phase PM :

0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0



• *porteuse :* $s_p(t) = A\cos(2\pi f_p t + \varphi)$ sinusoïdale

$A \rightarrow A(t) = A + s_m(t)$: **AM** ($s_m(t)$ signal à transmettre)

$f_p \rightarrow f_p(t) = f_p + s_m(t)$: **FM**

$\varphi \rightarrow \varphi(t) = \varphi_0(t) + s_m(t)$: **PM** ($\varphi_0(t) = 2\pi f_p t + \varphi$)

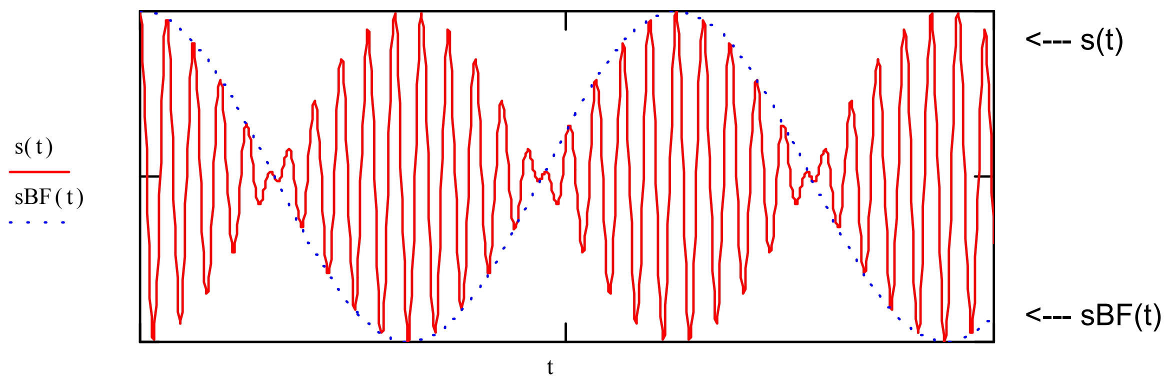
Modulation par multiplication

Porteuse: $s_p(t) = A_p \cdot \cos\left(2\pi f_p t\right)$

Signal BF (supposé sinusoïdal): $s_m(t) = A_m \cdot \cos\left(2\pi f_m t\right)$

Représentation temporelle du signal modulé *s*(*t*) : *(signal émis)*

$$\boxed{s(t) = k \cdot s_p(t) \cdot s_m(t) = k A_p A_m \cdot \cos\left(2\pi f_p t\right) \cdot \cos\left(2\pi f_m t\right)}$$



$s_m(t)$ = « enveloppe » de $s(t)$

Modulation d'Amplitude (AM)

Porteuse: $s_p(t) = A_p \cdot \cos\left(2\pi\, f_p t\right)$

Signal BF (supposé sinusoïdal): $s_m(t) = A_m \cdot \cos\left(2\pi\, f_m t\right)$

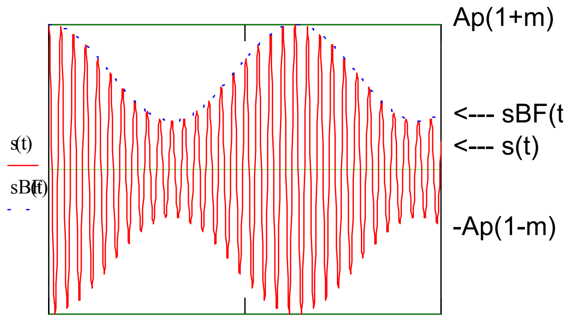
Représentation temporelle du signal modulé : *s*(*t*)

$$s(t) = \left[A_p + s_m(t)\right]\cdot\cos\left(2\pi f_p t\right) = \left[A_p + A_m \cdot \cos\left(2\pi f_m t\right)\right]\cdot\cos\left(2\pi f_p t\right)$$

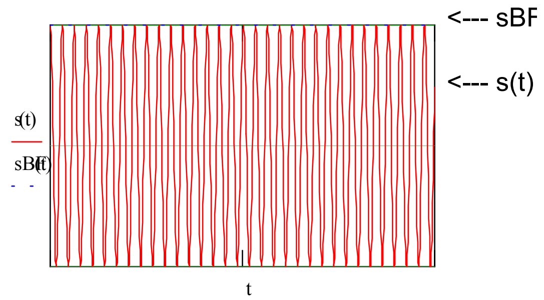
En posant : $\boxed{m = \dfrac{A_m}{A_p}}$: indice, ou taux de modulation (en %) :

$$\boxed{s(t) = A_p\left[1 + m\cdot\cos\left(2\pi f_m t\right)\right]\cdot\cos\left(2\pi f_p t\right)}$$

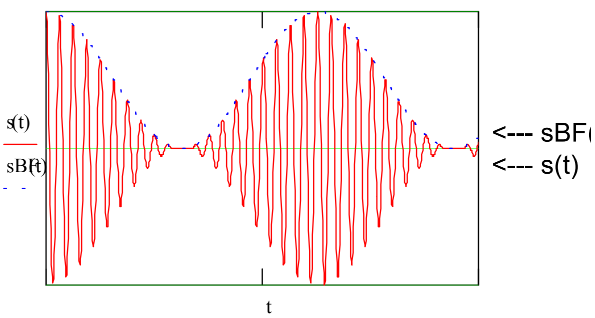
• *Réglage du taux de modulation m :*



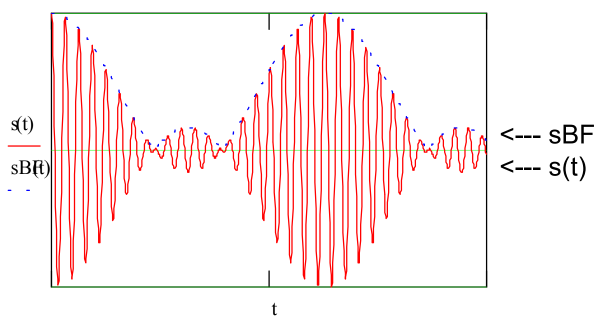
$0 < m < 1$



$m = 0$



$m = 1$



$m > 1$

Modulation de Fréquence (FM) et Modulation de Phase (PM)

Porteuse: $s_p(t) = A_p \cdot \cos\left(2\pi f_p t + \varphi(t)\right) \overset{\Delta}{=} A_p \cdot \cos\left(\theta(t)\right)$

Signal BF (supposé sinusoïdal): $s_m(t) = A_m \cdot \cos\left(2\pi f_m t\right)$

Représentation temporelle du signal modulé : *s*(*t*)

En modulation PM et FM : $s_m(t)$ intervient dans $\theta(t)$:

$\boxed{\theta(t) = 2\pi f_p t + \varphi(t)}$ et : $A(t) = A_p$

- en PM $\boxed{\varphi(t) = k\ s_m(t)}$ $\rightarrow s(t) = A_p \cos\left(2\pi f_p t + k s_m(t)\right)$

$$\rightarrow s(t) = A_p \cos\left(2\pi f_p t + kA_m \cos(2\pi f_m t)\right) = A_p \cos\left(2\pi f_p t + m \cdot \cos(2\pi f_m t)\right)$$

avec : $m = kA_m$: indice de modulation.

- en FM $\boxed{\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = k\ s_m(t)}$ $\rightarrow s(t) = A_p \cos\left(2\pi f_p t + k\int_0^t s_m(\tau)d\tau\right)$

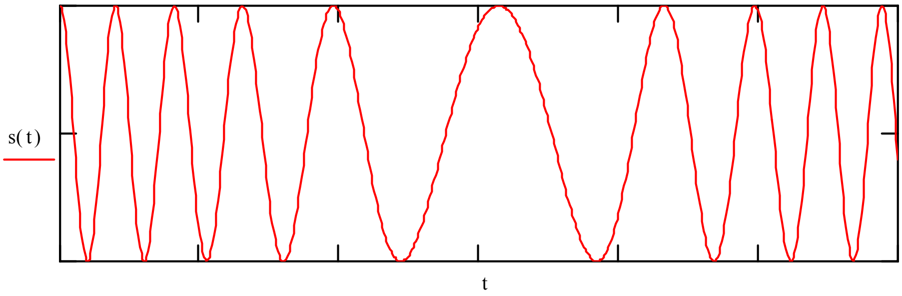
$$\rightarrow s(t) = A_p \cos\left[2\pi f_p t + \frac{kA_m}{2\pi f_m}\sin(2\pi f_m t)\right] = A_p \cos\left[2\pi f_p t + m \cdot \sin(2\pi f_m t)\right]$$

avec : $m = \dfrac{kA_m}{2\pi f_m}$: indice de modulation.

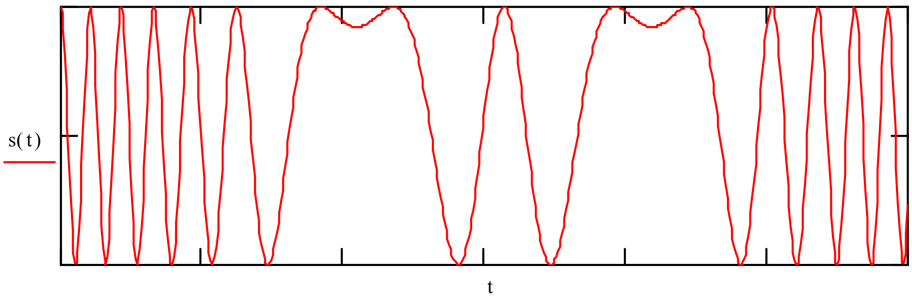
Forme du signal FM

Pour $s_m(t)$ sinusoïdal :

• *modulation correctement réalisée : (*m faible et $\neq 0$*)*



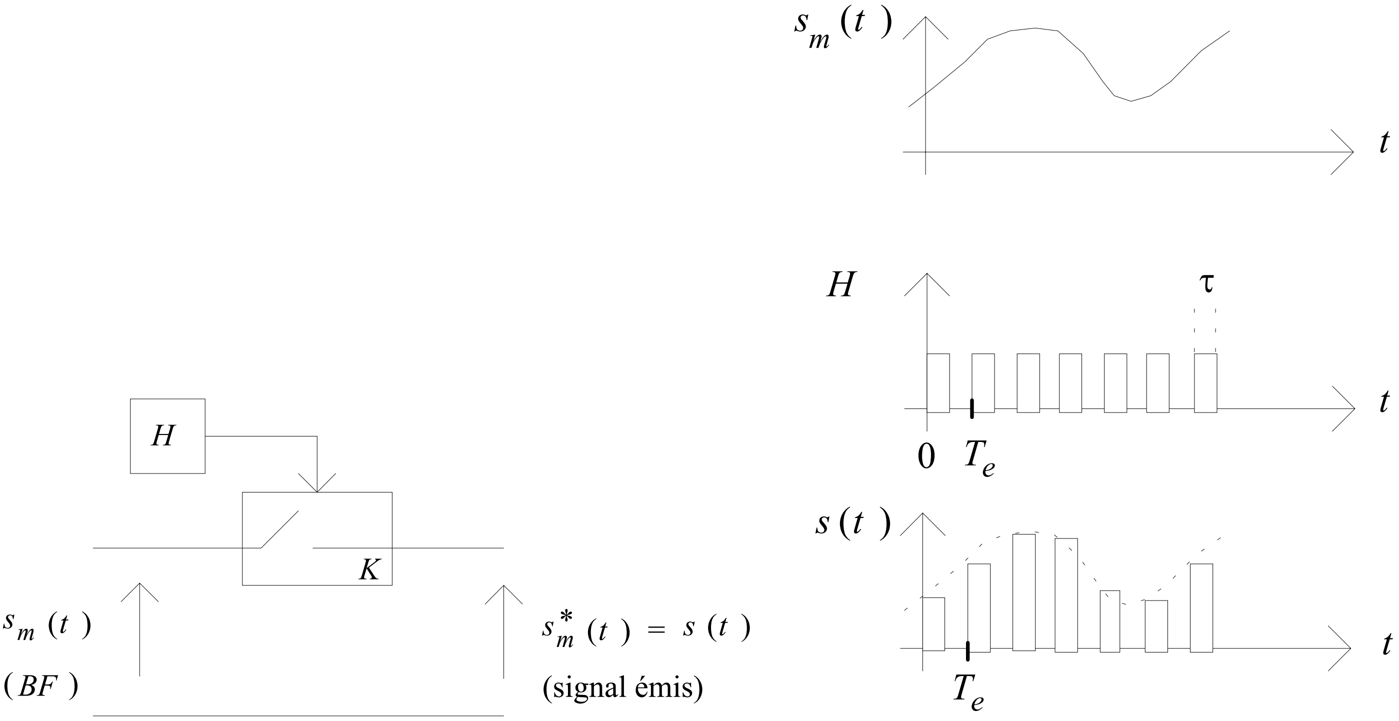
• *surmodulation (perte d'informations) : (*m élevé*)*



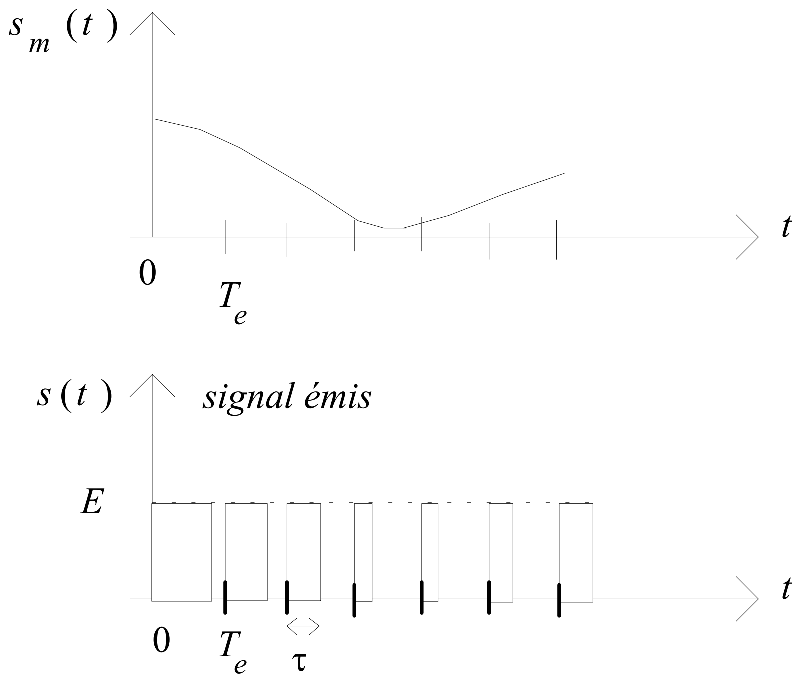
Modulations numériques (Transmissions Numériques)

Les modulations d'impulsions

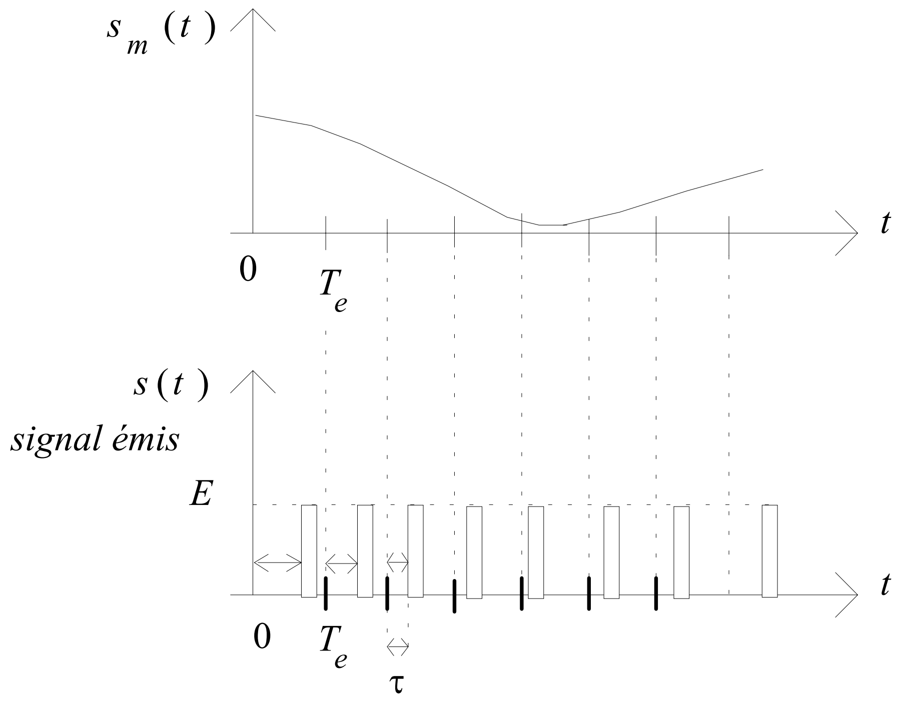
La modulation d'impulsions en amplitude



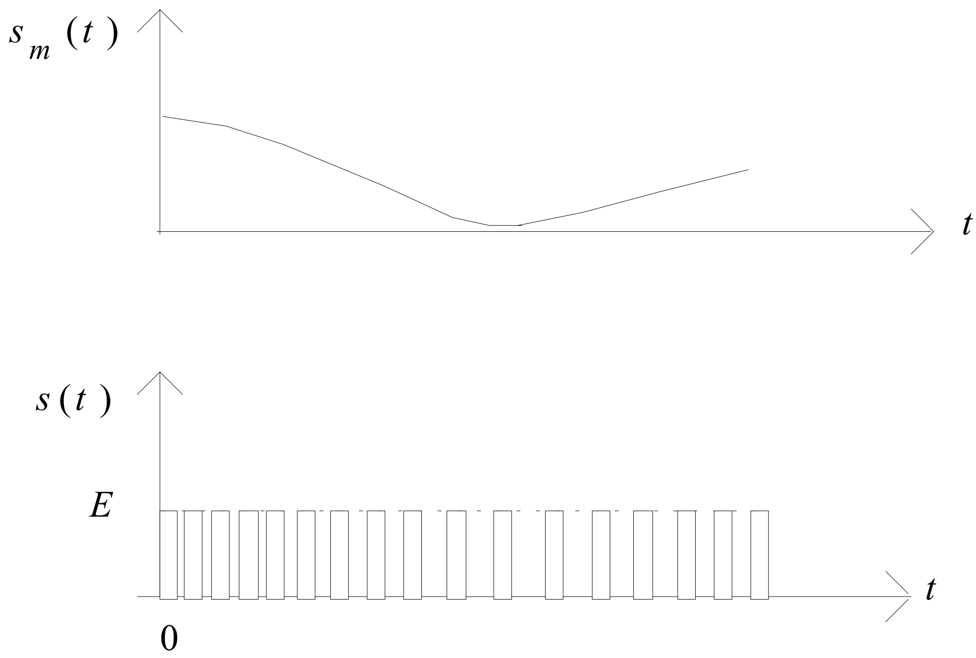
La modulation d'impulsions en durée (PWM)



La modulation d'impulsions en position



La modulation d'impulsions en densité (F_e variable)

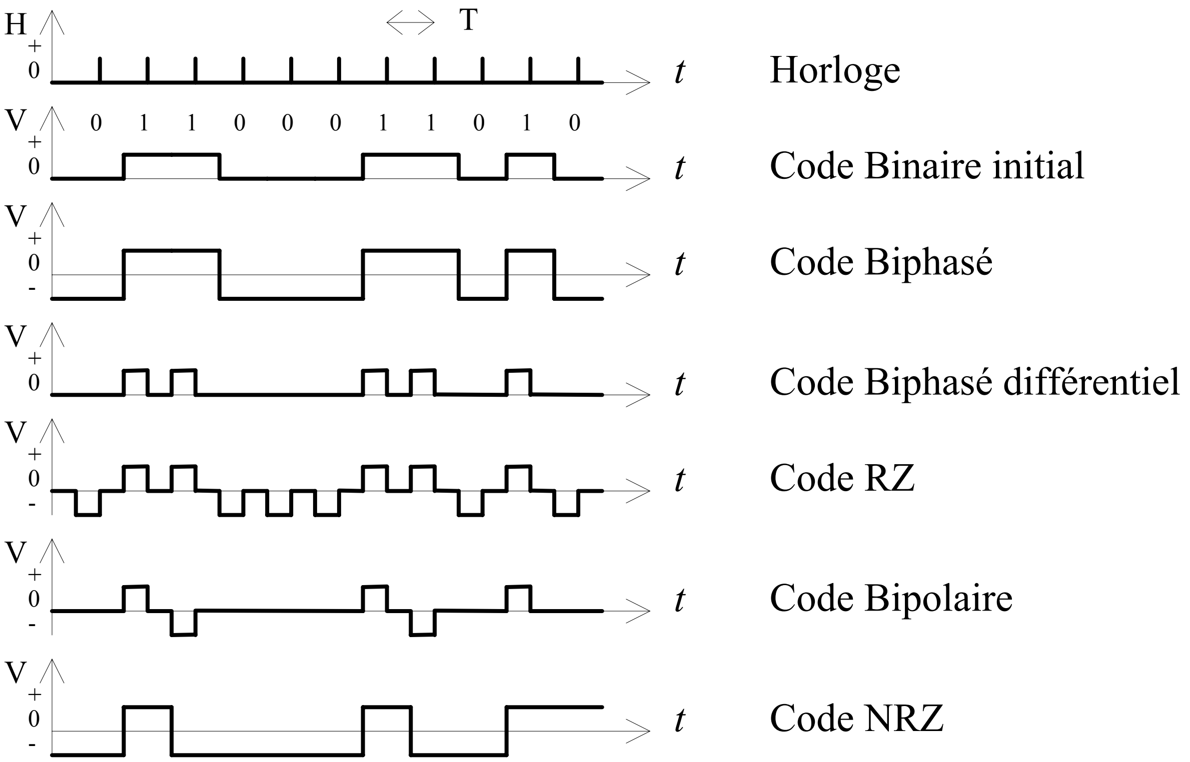


La modulation d'impulsions codées (MIC)

1 impulsion est codée par 1 mot binaire

Les principaux codages utilisés sont les suivants :

- code binaire biphasé
- code différentiel biphasé
- code RZ (Retour à Zéro)
- code NRZ (Non Retour à Zéro)
- code à modulation de délai (DM ou Miller)
- codes FM
- codes multiniveaux



Transmission du signal binaire (≡ numérique)

Transmission en Bande de Base

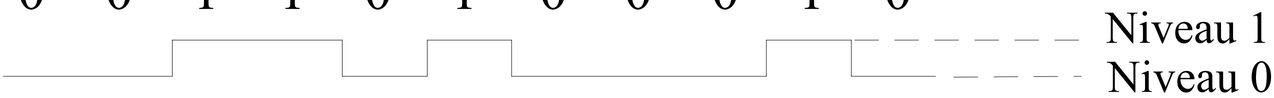
Pas de modulation.

Transmission par modulation

Transmission d'un signal numérique (porteuse sinusoïdale )

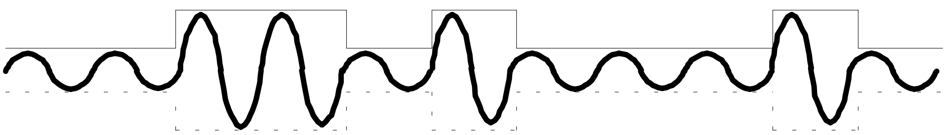
Signal à transmettre :

0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0



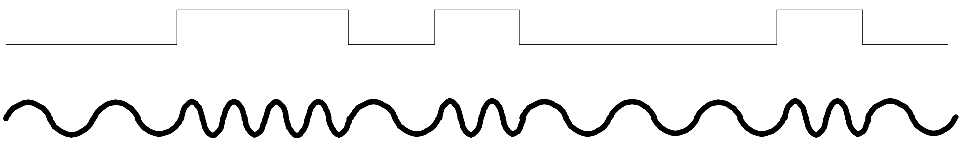
Modulation d'amplitude AM (ASK) :

0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0



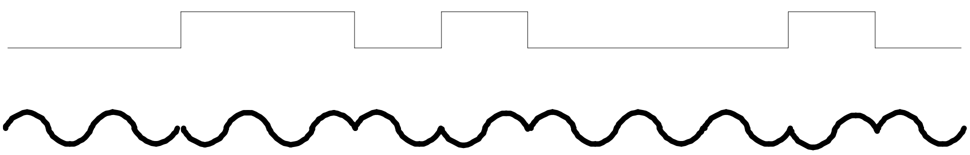
Modulation de fréquence FM (FSK) :

0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0



Modulation de phase PM (PSK) :

0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0



II. EGALISATION

$$\{u_n\} \longrightarrow \underset{canal}{\overset{Dégradation}{\boxed{G(z)}}} \xrightarrow{\{v_n\}} \overset{Restauration}{\boxed{F(z)}} \longrightarrow \{y_n\}$$

$G(z)F(z)$: FT du canal de transmission dégradé-restauré.

Etant donné la dégradation $G(z)$ (par identification)

déterminer le filtre de restauration $F(z)$ tel que $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = D(z)$

soit : $F(z)G(z) = D(z)$. **Egalisation :** $D(z) = 1$

Solution immédiate : $F(z) = \dfrac{D(z)}{G(z)}$: généralement non réalisable.

$\rightarrow$ Choix de filtres $F(z)$ du type MA ($\equiv$ RIF)

$\rightarrow$ Minimiser le critère *quadratique* ($\equiv$ *moindres carrés*) *en déterministe :*

$$\boxed{V(\{f_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(d_n - \hat{d}_n\right)^2}$$

avec :

$\{d_n\}$, $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ sont les RIs de $D(z)$, $F(z)$ et $G(z)$

et $\{\hat{d}_n\}$ = RI du canal restauré.

Relation d'égalisation : $F(z)G(z) = D(z) \rightarrow \hat{d}_n = g_n * f_n$

$V(\{f_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n - g_n * f_n)^2$ avec $f_n = 0$ pour $n < 0$ et $n > N$

($\{f_n\}$: filtre RIF causal de support de longueur $N+1$)

$$\rightarrow V(\{f_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(d_n - \sum_{k=0}^{N} f_k g_{n-k}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^2 - 2\sum_{k=0}^{N} f_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n g_{n-k} + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} f_i f_j \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{n-i} g_{n-j}\right]$$

(on rappelle que : $\left(\sum_{i=0}^{N} a_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{N} a_i^2 + 2\sum_{i=0}^{N-1} a_i \sum_{j=i+1}^{N} a_j = \sum_{i=0}^{N} a_i^2 + 2\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} a_i a_j$)

or : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n g_{n-k} = \varphi_{dg_{-k}}$ et en posant $n - j = \lambda$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{n-i} g_{n-j} \overset{n-j=\lambda}{=} \sum_{\lambda=-0}^{\infty} g_{\lambda+j-i} g_{\lambda} = \varphi_{gg_{j-i}}$$

φ_{gg} autocorrélation de g_n φ_{dg} intercorrélation entre d_n et g_n

donc $V(\{f_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^2 - 2\sum_{k=0}^{N} f_k \varphi_{dg_{-k}} + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} f_i f_j \varphi_{gg_{j-i}}$

Posons :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^2 = \alpha^2 \qquad \underline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdots \\ f_N \end{bmatrix} \qquad \underline{\varphi}_{dg} = \begin{bmatrix} \varphi_{dg_0} \\ \varphi_{dg_{-1}} \\ \cdots \\ \varphi_{dg_{-N}} \end{bmatrix} \qquad \phi_{gg_{i,j}} = \varphi_{gg_{j-i}}$$

(ϕ_{gg} : matrice de Toeplitz)

$$\rightarrow \quad V(\underline{\mathbf{f}}) = \alpha^2 - 2\underline{\mathbf{f}}^{\mathrm{T}}\underline{\varphi}_{dg} + \underline{\mathbf{f}}^{\mathrm{T}}\phi_{gg}\underline{\mathbf{f}}$$

dont le minimum est donné par l'annulation du gradient :

$$\underline{\mathbf{V}}_{\underline{\mathbf{f}}} = -2\underline{\varphi}_{dg} + 2\phi_{gg}\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Donc : $\boxed{\phi_{gg}\underline{\mathbf{f}} = \underline{\varphi}_{dg}}$

Egalisation

$$D(z) = 1 \qquad \{d_n\} = \delta_n \quad \text{et} \quad \varphi_{dg_{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n g_{n-k} = g_{-k}$$

$\rightarrow$ en posant $\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_{-1} \\ \cdots \\ g_{-N} \end{bmatrix}$:

On retrouve une forme proche du système d'équations de **Yule-Walker**. Ce sont les équations de **Wiener-Hopf** :

$$\boxed{\phi_{gg}\,\underline{\mathbf{f}} = \underline{\gamma}}$$

Solution : $\boxed{\underline{\mathbf{f}} = \phi_{gg}^{-1}\,\underline{\gamma}}$

Cas causal (g_n causale): l'égalisation conduit au système (Yule-Walker)

$$\phi_{gg}\,\underline{\mathbf{f}} = \underline{\gamma} \quad \text{avec} \quad \underline{\gamma} = \begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

III. EXTRACTION DE SIGNAL IMMERGE DANS DU BRUIT

Ce type de débruitage est basé sur un critère quadratique (minimisation de l'énergie de l'erreur) dans un contexte stochastique.

$$\{u_n\} = \{s_n\} + \{b_n\} \longrightarrow \boxed{F(z)} \longrightarrow \{\hat{s}_n\}$$

A partir de la mesure $u_n = s_n + b_n$ (signal + bruit), il s'agit de déterminer la FT $F(z)$ (ou la séquence RI $\{f_n\} = TZ^{-1}[F(z)]$) satisfaisant au critère *quadratique* pour *signaux aléatoires*

(on passe en *Espérance*) :

$$\boxed{V(\{f_n\}) = E\left[S_n - \hat{S}_n\right]^2} \quad \text{minimum}$$

avec : $\{S_n\}$ VA dont une réalisation est $\{s_n\}$

Extraction du bruit $\rightarrow$ $\hat{S}_n = f_n * U_n$

$$\rightarrow \; V(\{f_n\}) = E\left[S_n - f_n * U_n\right]^2$$

$\{f_n\}$ pris comme un filtre RIF de longueur $N+1$ (filtre MA) :

$$\rightarrow \; V(\{f_n\}) = E\left[S_n - \sum_{k=0}^{N} f_k * U_{n-k}\right]^2$$

En posant :

$$\underline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \\ \cdots \\ U_{n-N} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \; V(\{f_n\}) = V(\underline{\mathbf{f}}) = E\left[S_n - \underline{\mathbf{f}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{U}}\right]^2$$

Principe d'~**orthogonalité**~ **l'erreur est orthogonale à l'observation**

Le gradient (≡ dérivée) de V donne le minimum de $V(\underline{\mathbf{f}})$ pour :

$$\underline{\mathbf{V}}_{\underline{\mathbf{f}}} = 2E\left[\left(S_n - \underline{\mathbf{f}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{U}}\right)\underline{\mathbf{U}}\right] = \underline{\mathbf{0}}$$

Cette relation exprime le fait que, à l'instant n, l'erreur d'estimation ($S_n - \underline{\mathbf{f}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{U}}$) est $\perp$ à toutes les données présentes et passées ($\underline{\mathbf{U}}$)

le produit scalaire (≡ matriciel) est nul: c'est le principe d'**orthogonalité**

On a :

$$\underline{\mathbf{V}}_{\underline{\mathbf{f}}} = 2E\left[\left(S_n - \underline{\mathbf{f}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{U}}\right)\underline{\mathbf{U}}\right] = 2E\left[\underline{\mathbf{U}}\left(S_n - \underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{f}}\right)\right] = 2\left\{E\left[S_n\underline{\mathbf{U}}\right] - E\left[\underline{\mathbf{U}}\,\underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}\right]\underline{\mathbf{f}}\right\} = \underline{\mathbf{0}}$$

Terme général de la matrice $\underline{\mathbf{U}}\,\underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$ = terme d'autocorrélation $\varphi_{uu_{i-j}}$

$\rightarrow$ $E\left[\underline{\mathbf{U}}\,\underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}\right]$ = matrice d'autocorrélation ϕ_{uu}, notée $\mathbf{R}$:

$\mathbf{R} = E\left[\underline{\mathbf{U}}\,\underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}\right]$: matrice de Toeplitz.

De même on note $\underline{\varphi}_{su} = E\left[S_n\underline{\mathbf{U}}\right]$ le vecteur d'intercorrélation

$\rightarrow$ forme proche du système d'équations de **Yule-Walker**

Gradient de V s'écrit : $\underline{\mathbf{V}}_{\underline{\mathbf{f}}} = 2\left\{\underline{\varphi}_{su} - \mathbf{R}\,\underline{\mathbf{f}}\right\} = \underline{\mathbf{0}}$

Ce sont les équations de **Wiener-Hopf** : $\boxed{\mathbf{R}\,\underline{\mathbf{f}} = \underline{\varphi}_{su}}$

Solution : $\boxed{\underline{\mathbf{f}} = \mathbf{R}^{-1}\,\underline{\varphi}_{su}}$

Intérêt de cette approche :

Ne pas nécessiter la connaissance du bruit
mais seulement celle du signal à extraire (c'est un minimum !)

Pour filtrer un signal bruité, il faut la connaissance :
soit du bruit, soit du signal non bruité !

Dans un contexte d'*autoadaptation (filtrage adaptatif)*, la contrainte *Temps Réel* (*calcul en ligne*) impose d'éviter l'inversion matricielle en approchant $\mathbf{R}$ et $\underline{\varphi}_{su}$ en utilisant les données passées (**filtrage adaptatif (Widrow)**).

____