6. Prédiction

Prédiction

Lissage - Filtrage - Prédiction

Soit n mesures d'un signal. Le traitemement de la mesure au temps :

. $n-1$ (ou $n-k$, $k>0$) *(passé)* : s'appelle le *lissage*
. n *(présent)* : s'appelle le *filtrage*
. $n+1$ (ou $n+k$, $k>0$) *(futur)* : s'appelle la *prédiction*

PREDICTION LINEAIRE (Codage LPC)

Prédiction linéaire du point y_n d'un signal y (de M points) sur un passé de N points ($N \leq M$) :

$$\hat{y}_n = -a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} - \cdots - a_N y_{n-N}$$

soit : $$\boxed{\hat{y}_n = -\sum_{i=1}^{N} a_i y_{n-i}}$$

Le filtre de prédiction est donc un filtre AR pur (≡ sans entrée).

Erreur de prédiction : $$e_n \overset{\Delta}{=} y_n - \hat{y}_n$$

d'où : $$e_n = \sum_{i=0}^{N} a_i y_{n-i} \quad \text{(avec } a_0 = 1\text{)}$$

Passage en stochastique : $e_n = \sum_{i=0}^{N} a_i y_{n-i} \quad \rightarrow \quad E_n = \sum_{i=0}^{N} a_i Y_{n-i}$

Calcul des coeffs a_i minimisant la puissance (≈ la variance) de E_n :

Rappel : *Puissance de* X_n : $P_X = E\left[X_n^2\right]$

≈ *Variance de* X_n : $V_X = E\left[X_n^2\right] - E^2\left[X_n\right]$

Puissance P_E *de* E_n :

$$P_E = E\left[E_n^2\right] = E\left[\sum_{i=0}^{N} a_i Y_{n-i} \cdot \sum_{j=0}^{N} a_j Y_{n-j}\right] = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_i a_j E\left[Y_{n-i} Y_{n-j}\right]$$

$$\rightarrow \quad \boxed{P_E = E\left[E_n^2\right] = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_i a_j \varphi_{yy_{j-i}}}$$

où φ_{yy_k} = fonction d'autocovariance (≡ d'autocorrélation) de y.

Puissance minimale :

$$\frac{\partial E\left[E_n^2\right]}{\partial a_n} = \frac{\partial}{\partial a_n}\left[a_n^2 \varphi_{yy_0} + 2a_n \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq n}}^{N} a_m \varphi_{yy_{n-m}} + \text{termes ne contenant pas } a_n \right] = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial E\left[E_n^2\right]}{\partial a_n} = 2a_n \varphi_{yy_0} + 2\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq n}}^{N} a_m \varphi_{yy_{n-m}} = 0$$

soit (condition d'optimalité) :

$$a_n \varphi_{yy_0} + \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq n}}^{N} a_m \varphi_{yy_{n-m}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} n = 0,\cdots,N \\ a_0 = 1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \quad a_n \varphi_{yy_0} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} a_m \varphi_{yy_{n-m}} + \left. a_0 \varphi_{yy_n} \right|_{n\neq 0} = 0 \qquad \begin{pmatrix} n = 0,\cdots,N \\ a_0 = 1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \quad \sum_{m=1}^{N} a_m \varphi_{yy_{n-m}} + \left. a_0 \varphi_{yy_n} \right|_{n\neq 0} = 0 \qquad \begin{pmatrix} n = 0,\cdots,N \\ a_0 = 1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \quad \sum_{m=1}^{N} a_m \varphi_{yy_{n-m}} = -\varphi_{yy_n} \qquad \begin{pmatrix} n = 1,\cdots,N \\ a_0 = 1 \end{pmatrix}$$

ou encore : $\boxed{\sum_{m=0}^{N} a_m \varphi_{yy_{n-m}} = 0} \qquad \begin{pmatrix} n = 1,\cdots,N \\ a_0 = 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi_{yy_k} \text{ paire} \rightarrow E\left[E_n^2\right] = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_i a_j \varphi_{yy_{j-i}} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j \varphi_{yy_{j-i}} + a_0 \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi_{yy_i}$$

$$\rightarrow E\left[E_n^2\right] = \sum_{j=1}^{N} a_j \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi_{yy_{j-i}} + a_0 \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi_{yy_i} \qquad (a_0 = 1)$$

Comme : $$\sum_{m=0}^{N} a_m \varphi_{yy_{n-m}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} n = 1, \cdots, N \\ a_0 = 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{E\left[E_n^2\right]_{\min} = \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi_{yy_i} \overset{\Delta}{=} V} \qquad (a_0 = 1)$$

On a donc :

$$\boxed{\sum_{m=0}^{N} a_m \varphi_{yy_{n-m}} = 0} \qquad \begin{pmatrix} n = 1, \cdots, N \\ a_0 = 1 \end{pmatrix}$$

et : $$\boxed{E\left[E_n^2\right]_{\min} = \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi_{yy_i} \overset{\Delta}{=} V} \qquad (a_0 = 1)$$

Ces équations peuvent s'écrire :

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_{yy_0} + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy_i} = V \\ \varphi_{yy_1} + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy_{i-1}} = 0 \\ \cdots \\ \varphi_{yy_N} + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{yy_{N-i}} = 0 \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \text{Pour } k = 0 \text{ à } N : \\ \sum_{n=0}^{N} \varphi_{yy_{k-n}} a_n = \begin{cases} V & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq k \leq N \end{cases} \\ (a_0 = 1) \\ (\varphi_{yy_k} \text{ paire}) \end{array}\right.$$

soit, sous forme matricielle : ce sont les équations de **Yule-Walker** :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{yy_0} & \varphi_{yy_1} & \cdots & \varphi_{yy_N} \\ \varphi_{yy_1} & \varphi_{yy_0} & \cdots & \varphi_{yy_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{yy_N} & \varphi_{yy_{N-1}} & \cdots & \varphi_{yy_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{R}\,\underline{a} = \underline{v}}$$

La matrice d'autocorrélation $\mathbf{R}$ de terme général $r_{i,j}$ ne dépendant que de $i - j$ (φ_{yy_k} paire) est dite matrice de Toeplitz.

Ainsi, à partir de la connaissance de la séquence d'autocorrélation de $\{Y_n\}$, la relation matricielle permet de déterminer les $N+1$ inconnues : V et les N paramètres a_i du filtre prédicteur.

Résolution du système de **Yule-Walker**

Une inversion matricielle est possible mais on utilise généralement l'algorithme efficace itératif de **Levinson**, ou la méthode de **Burg**, qui évitent une inversion matricielle.

(La méthode de **Burg**, introduisant la contrainte supplémentaire de stabilité du filtre de prédiction au système de **Yule-Walker**, garantit ainsi un filtre AR de prédiction stable).

Remarque :

D'un point de vue algorithmique, les 2 problèmes de filtre prédicteur et de synthèse AR sont donc équivalents. On montre d'ailleurs que, pour N suffisamment grand, $\{E_n\}$ est un bruit blanc.

Application

- **Compression de signal par codage LPC**
- **Caractérisation : Analyse spectrale par codage LPC**